

# SKRIPT ZUR DARSTELLUNGSTHEORIE

Version vom 24. Oktober 2025

Prof. Dr. István Heckenberger

Dr. Sebastian Halbig

*E-Mail Adresse:* [heckenberger@mathematik.uni-marburg.de](mailto:heckenberger@mathematik.uni-marburg.de)

*E-Mail Adresse:* [sebastian.halbig@uni-marburg.de](mailto:sebastian.halbig@uni-marburg.de)

Groups, like humans, should be judged by their actions.

---

*unbekannter Author*, wird oft dem argentinischen Politiker *Guillermo Moreno* zugeordnet

In der *Darstellungstheorie endlicher Gruppen* studiert man Gruppenwirkungen auf Vektorräumen mittels invertierbarer linearer Transformationen. Anwendungen sind sowohl intrinsischer, als auch extrinsischer Natur. Einerseits bietet sie Möglichkeiten die zugrundeliegenden Gruppen zu untersuchen und ist beispielsweise ein zentraler Bestandteil der Klassifikation *endlicher einfacher Gruppen*, siehe [Sol95]. Andererseits erlaubt uns Darstellungstheorie, systematisch Symmetrien von Systemen auszunutzen und ermöglicht so Anwendungen in einer Vielzahl von inner- und äußermathematischen Forschungsbereichen:

- (i) In der Zahlentheorie werden unter anderem Darstellungen der absoluten Galoisgruppe untersucht. Diese ist im Allgemeinen eine Gruppe unendlicher Kardinalität, die durch einer Familie endlicher Gruppen beschrieben werden kann. Der Beweis des Satzes von Fermat durch Andrew Wiles beschäftigt sich mit Darstellungen der absoluten Galoisgruppe der rationalen Zahlen, siehe [Wil95].
- (ii) Ein zentraler Aspekt der Lie-Theorie ist das Studium der Darstellungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren, [Hal15]. Obwohl es wichtige Überschneidungen mit der Darstellungstheorie endlicher Gruppen gibt, handelt es sich hierbei um ein eigenständiges Themengebiet mit dafür spezifischen Techniken. Zentrale Objekte dieses Themenkomplexes sind Wurzelsysteme. Ihre Symmetrien werden von Weyl-Gruppen beschrieben. Darstellungstheorie (endlicher) Gruppen erlaubt es uns Weyl-Gruppen zu unterscheiden und zu bestimmen, welche von ihnen endlich sind. Sie liefert so einen Bestandteil im Studium halbeinfacher Lie-Algebren.
- (iii) Die meisten endlichen einfachen Gruppen sind vom sogenannten Lie-Typ. Ihre Darstellungstheorie ist ebenfalls ein interessantes Themengebiet [Hum06].
- (iv) Die diskrete Fouriertransformation, die der harmonischen Analysis zugerechnet werden kann, fußt auf Darstellungen der zyklischen Gruppe, [Dia88].

Darüber hinaus findet man Anwendungen in der Chemie [Bis93], der Physik [?] und auch außerhalb des naturwissenschaftlich-technischen Themenbereichs, wie zum Beispiel der Anthropologie, [Mor03].

Eine mögliche Erklärung für die Vielseitigkeit der Darstellungstheorie ist, dass Sie zwei weit entwickelte mathematische Werkzeuge miteinander vereinigt: Die Gruppentheorie und die lineare Algebra. Im Verlauf dieses Semesters werden wir uns mit Darstellungen von endlichen Gruppen über den komplexen Zahlen befassen und dabei kennenlernen, wie deren Strukturen mittels algebraischer und geometrischer Argumente analysiert werden können.

**Literatur.** Dieses Skript orientiert sich maßgeblich an den Vorlesungsnotizen “Group Representation Theory” von Travis Schedler, [Sch21]. Weitere relevante Quellen sind

- (i) “Linear Representations of Finite Groups” von Jean-Paul Serre, [Ser77],
- (ii) “Representation theory. A first course” von William Fulton und Joe Harris, [FH91],
- (iii) “Introduction to Representation Theory” von Pavel Etingof, [EGH<sup>+</sup>09],

- (iv) “A course in finite group representation theory” von Peter Webb, [[Web16](#)],
- (v) “Character theory of finite groups” von I. Martin Isaacs, [[Isa06](#)],
- (vi) “Representation theory of finite group” von Benjamin Steinberg, [[Ste12](#)].

Weiterführende Inhalte sind außerdem zu finden in:

- (vii) “Modular representation theory of finite groups” von Caroline Lassueur, [[Las23](#)],
- (viii) “Lectures on Modules and Rings” von T.Y. Lam, [[Lam99](#)]
- (ix) “A first course in noncommutative rings” von T.Y. Lam, [[Lam01](#)],
- (x) “Combinatorics of Coxeter groups” von Anders Björner und Francesco Brenti, [[BB05](#)],
- (xi) “Reflection groups and Coxeter groups” von James Humphreys, [[Hum90](#)],
- (xii) “Category theory in context” von Emily Riehl, [[Rie17](#)]
- (xiii) “Tensor categories” von Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych und Viktor Ostrik, [[EGNO15](#)],
- (xiv) “Introduction to Soergel bimodules” von Ben Elias, Shotaro Makisumi, Ulrich Thiel und Geordie Williamson, [[EMTW20](#)],
- (xv) “Purity, Spectra and localisation” von Mike Prest, [[Pre09](#)].

## 1. Woche 01: Erste Beispiele von Darstellungen

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Die Definition einer Darstellung
- (ii) Beispiele von Darstellungen
- (iii) Einige Anwendungen der Darstellungstheorie

Es sei  $k$  ein Körper. Später werden wir  $k = \mathbb{C}$  setzen und komplexe Darstellungen betrachten. Dies wird uns signifikant mehr Werkzeuge zur Verfügung stellen; sowohl algebraische, resultierend aus der Tatsache, dass  $\mathbb{C}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 ist, als auch geometrische, da wir beweisen werden, dass die *einfachen* Darstellungen, gewissermaßen die kleinsten Bestandteile der Darstellungstheorie, mit einer Orthonormalbasis eines unitären Vektorraums korrespondieren.

WIEDERHOLUNG. Eine *Gruppe* ist ein Tripel  $(G, \cdot, e)$  bestehend aus einer Menge  $G$ , einer Abbildung

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

die wir die (*Gruppen*-)Multiplikation nennen, und einem Element  $e \in G$ , das *neutrales Element* heißt, sodass die folgenden Axiome gelten:

- (i) Die Multiplikation ist *assoziativ*:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  für alle  $a, b, c \in G$ ,
- (ii) Die Multiplikation ist *unital*:  $a \cdot e = a = e \cdot a$  für alle  $a \in G$ .
- (iii) Für jedes  $a \in G$  existiert ein *inverses Element*  $b \in G$ , sodass  $a \cdot b = e = b \cdot a$ . Wir setzen  $a^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} b$ .

Eine Teilmenge  $H \subset G$  heißt *Untergruppe*, wenn  $e \in H$  und  $a \cdot b^{-1} \in H$  für alle  $a, b \in H$ . Jede Untergruppe ist selbst eine Gruppe. Man nennt die Untergruppe  $H \subset G$  *normal*, wenn  $ghg^{-1} \in H$  für alle  $g \in G$  und  $h \in H$ . Der Quotient  $G/H = \{gH \mid g \in G\}$  ist eine Gruppe falls  $H$  normal ist.

Die *Ordnung* von  $G$  ist  $\text{ord}(G) = |G|$ . Für  $a \in G$  schreiben wir  $\text{ord}(a) = \text{ord}(\langle a \rangle)$ , wobei  $\langle a \rangle = \bigcap_{H \subset G \text{ Untergruppe, } a \in H} H$ .

Sei  $M$  eine Menge. Wir schreiben  $M^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{m^{-1} \mid m \in M\}$  für die Menge der (formalen) Inversen von  $M$  und definieren die von  $M$  erzeugte *frei Gruppe* als

$$\langle M \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{m_1 \dots m_n \mid n \in \mathbb{N}_0, m_i \in M \cup M^{-1} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}.$$

Ihre Elemente sind "Worte" endlicher Länge in den Buchstaben  $M \sqcup M^{-1}$ . Das neutrale Element ist das leere Wort. Multiplikation ist durch Konkatenation gegeben. Für  $R \subset M$  ist  $\langle M \mid R \rangle$  für die von einer Menge  $M$  erzeugte Gruppe, die die Relationen  $R$  erfüllt. Das bedeutet

$$\langle M \mid R \rangle = \langle M \rangle / (R), \quad \text{mit} \quad (R) = \bigcap_{H \subset G \text{ normal, } R \subset H} H.$$

Wir werden der Übersichtlichkeit halber oft  $\langle m_1, \dots, m_n \mid r_1 = e, \dots, r_l = e \rangle$  anstelle von  $\langle M \mid R \rangle$  schreiben.

ÜBUNG 1.1. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl.

- (i) Zeigen Sie, dass die Menge  $C_n = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1\}$  eine Untergruppe von  $\mathbb{C}^\times$  ist.
- (ii) Bestimmen Sie alle  $\zeta \in C_n$  mit  $\text{ord}(\zeta) = n$ .

ÜBUNG 1.2. Es sei die Gruppe  $G = \langle i, j \mid i^4 = e, i^2 = j^2, ji = i^3j \rangle$  gegeben. Bestimmen Sie  $\text{ord}(G)$ .

WIEDERHOLUNG. Seien  $(G, \cdot_G, e_G)$  und  $(H, \cdot_H, e_H)$  zwei Gruppen. Eine Abbildung  $f: G \rightarrow H$  heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn

$$f(a \cdot_G b) = f(a) \cdot_H f(b) \quad \text{für alle } a, b \in G.$$

Man zeigt,  $f(e_G) = e_H$  und  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$  für alle  $a \in G$ .

Eine *Isomorphismus von Gruppen* oder *Gruppenisomorphismus*  $f: G \rightarrow H$  ist ein Homomorphismus, sodass ein weiterer Homomorphismus  $g: H \rightarrow G$  existiert, sodass  $gf = \text{id}_G$  und  $fg = \text{id}_H$ . Man zeigt, ein Homomorphismus von Gruppen  $f: G \rightarrow H$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn  $f$  bijektiv ist.

ÜBUNG 1.3. Zeigen Sie, dass die Gruppen  $S_3$  und  $\langle a, b \mid a^2 = e, b^2 = e, aba = bab \rangle$  isomorph sind.

Sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Die *Automorphismen* von  $V$ , das heißt, die invertierbaren linearen Abbildungen  $f: V \rightarrow V$ , bilden die Gruppe  $\text{Aut}_k(V)$  mit Verkettung als Gruppenmultiplikation.

DEFINITION 1.1. Eine *Darstellung* einer Gruppe  $G$  ist ein Paar  $(V, \rho)$  bestehend aus einem  $k$ -Vektorraum  $V$  und einem Gruppenhomomorphismus  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$  von  $G$ .

BEMERKUNG 1.2. Es ist üblich, eine Darstellung  $(V, \rho)$  einer Gruppe  $G$  nur durch Nennung ihres zugrundeliegenden Vektorraums  $V$  anzugeben – der Gruppenhomomorphismus  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$  ist hier entweder implizit mitzudenken oder ergibt sich aus dem Kontext. Wir werden dieser Konvention folgen, wenn es der Übersichtlichkeit hilft und keine Verwechslungsgefahr besteht.

DEFINITION 1.3. Sei  $G$  eine Gruppe und  $(V, \rho)$  eine Darstellung. Man nennt  $\dim_k V$  die *Dimension* der Darstellung. Ist  $\dim_k V < \infty$  spricht man von einer *endlichdimensionalen* Darstellung. Ansonsten heißt  $(V, \rho)$  *unendlichdimensional*.

KONVENTION 1.4. Wir werden uns in diesem Skript auf *endlichdimensionale* Darstellungen von *endlichen* Gruppen konzentrieren. Sollten wir unendliche Gruppen oder unendlichdimensionale Vektorräume betrachten, wird darauf explizit hingewiesen.

Statt Darstellungen mittels “abstrakter” Automorphismen zu analysieren, ist es für Beispiele oftmals leichter, direkt mit (invertierbaren) Matrizen zu arbeiten. Dies ist möglich indem man eine Basis fixiert. Konkret, sei  $V$  ein  $m$ -dimensionaler Vektorraum und  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$  eine Darstellung einer beliebigen Gruppe  $G$ . Indem wir eine Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$  wählen lässt sich jeder Automorphismus  $f: V \rightarrow V$  von  $V$  mit einer *eindeutigen* invertierbaren Matrix  $f_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \in \text{GL}_m(k)$  identifizieren. Das bedeutet, die Darstellung  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_k(V) \cong \text{GL}_m(k)$  ordnet jedem Gruppenelement  $g \in G$  eine Matrix  $M_g \stackrel{\text{def}}{=} (\rho(g))_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \in \text{GL}_m(k)$  zu. Diese Zuordnung respektiert die Gruppenoperation. Das heißt, für alle  $g, h \in G$  gilt,

$$M_g \cdot M_h = (\rho(g))_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot (\rho(h))_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (\rho(g)\rho(h))_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (\rho(gh))_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M_{gh}.$$

WIEDERHOLUNG. Angenommen  $V$  und  $W$  seien zwei Vektorräume,  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  und  $\hat{f}: \mathcal{B} \rightarrow W$  eine (Mengen-)Abbildung. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$ , sodass  $f(b) = \hat{f}(b)$  für alle  $b \in \mathcal{B}$ . Wir werden uns diese Eigenschaft häufig zu nutze machen und lineare Abbildungen nur durch ihre Werte auf einer Basis angeben.

Wir wollen nun ein paar konkrete Beispiele verstehen, um ein erstes Gefühl für Darstellungen zu bekommen. Die ersten zwei Fälle sind allgemeiner Natur; sie sind für jede Gruppe wohldefiniert. Obwohl ihr Informationsgehalt vielleicht zunächst gering erscheint sind es tragende Säulen der Theorie, wie wir in den nachfolgenden Abschnitten erkennen werden.

**BEISPIEL 1.5 (Die triviale Darstellung).** Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Die *triviale Darstellung* ist

$$\rho_{\text{triv}}: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}), \quad g \longmapsto \text{id}_{\mathbb{k}}.$$

Die Gruppe  $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k})$  entspricht den invertierbaren  $1 \times 1$ -Matrizen über  $\mathbb{k}$  und damit der Gruppe  $\mathbb{k}^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k} \setminus \{0\}$  der Einheiten von  $\mathbb{k}$ . Die triviale Darstellung ordnet also jedem Gruppenelement  $g \in G$  die Matrix  $(1)$  zu.

**BEISPIEL 1.6 (Die reguläre Darstellung).** Wir betrachten als nächstes den Vektorraum  $\mathbb{k}[G] = \text{Abb}(G, \mathbb{k})$ . Dieser hat eine Basis  $\mathcal{B} = (\partial_g)_{g \in G}$ , genannt *Standardbasis*, wobei für jedes  $g \in G$  gilt

$$\partial_g: G \longrightarrow \mathbb{k}, \quad \partial_g(h) = \begin{cases} 1 & h = g \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die *reguläre Darstellung*  $\rho_{\text{reg}}: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[G])$  von  $G$  ist bestimmt durch

$$\rho_{\text{reg}}(g)\partial_h = \partial_{gh}, \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

Um die reguläre Darstellung besser zu verstehen, betrachten wir die symmetrische Gruppe  $G = S_3$  einer dreielementigen Menge. Ihre Multiplikationstabelle ist

	e	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
e	e	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2)	(1 2)	e	(1 3 2)	(1 2 3)	(2 3)	(1 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2 3)	e	(1 3 2)	(1 2)	(2 3)
(2 3)	(2 3)	(1 3 2)	(1 2 3)	e	(1 3)	(1 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3)	(2 3)	(1 2)	(1 3 2)	e
(1 3 2)	(1 3 2)	(2 3)	(1 2)	(1 3)	e	(1 2 3)

Es seien  $g = (1 2) \in S_3$  und  $h = (1 2 3) \in S_3$ . Linksmultiplikation mit  $g$  und  $h$  geht aus der blauen, beziehungsweise orange hinterlegten Zeile der vorherigen Tabelle hervor. Die darstellenden Matrizen von  $\rho_{\text{reg}}(g)$  und  $\rho_{\text{reg}}(h)$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{k}[S_3]$  sind

$$M_g \stackrel{\text{def}}{=} (\rho_{\text{reg}}(g))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_h \stackrel{\text{def}}{=} (\rho_{\text{reg}}(h))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergeben sich "klassische" Fragen der linearen Algebra:

- (i) Was sind die Eigenwerte dieser Matrizen?
- (ii) Sind  $M$  und  $N$  diagonalisierbar?
- (iii) Gibt es *eine* Basis  $\mathcal{C}$ , sodass  $(\rho_{\text{reg}}(g))_{\mathcal{C}}$  und  $(\rho_{\text{reg}}(h))_{\mathcal{C}}$  gleichzeitig in Diagonalfom vorliegen?

Während die Fragen (i) und (ii) für  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  eine sowohl einfache als auch schöne Antwort haben –  $M$  und  $N$  sind diagonalisierbar mit Einheitswurzeln als Eigenwerten – gestaltet sich das Auffinden einer befriedigenden Antwort auf Frage (iii) deutlich schwieriger. Hierzu werden wir in den nächsten Wochen die sogenannte Charaktertheorie entwickeln.

ÜBUNG 1.4. Wir betrachten die reguläre Darstellung  $(\mathbb{C}[C_3], \rho_{\text{reg}})$  der zyklischen Gruppe  $C_3 = \langle g \mid g^3 = e \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Ihre Elemente sind  $e, g, g^2$ .

- (i) Weisen Sie nach, dass die reguläre Darstellung wohldefiniert ist.
- (ii) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen von  $\rho_{\text{reg}}(g)$  und  $\rho_{\text{reg}}(g^2)$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{C}[C_3]$ .
- (iii) Zeigen Sie, dass  $\rho_{\text{reg}}(g)$  diagonalisierbar ist und finden Sie eine Basis aus Eigenvektoren.
- (iv) Es sei  $\Lambda' \in \mathbb{C}[C_3]$  ein Eigenvektor von  $\rho_{\text{reg}}(g)$ . Was ist  $\rho_{\text{reg}}(g^2)(\Lambda')$ ?

ÜBUNG 1.5. Es sei  $(\mathbb{C}[S_3], \rho_{\text{reg}})$  die reguläre Darstellung von  $S_3$ .

- (i) Geben Sie die Permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  in Zykelschreibweise an.
- (ii) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von  $\rho_{\text{reg}}(\sigma)$  bezüglich der Standardbasis.
- (iii) Zeigen Sie, dass  $\rho_{\text{reg}}(\sigma)$  diagonalisierbar ist.
- (iv) Finden Sie einen Vektor  $v \in \mathbb{C}[S_3]$ , sodass  $\rho_{\text{reg}}(\tau)v = \text{sgn}(\tau)v$  für alle  $\tau \in S_3$ .

ÜBUNG 1.6. Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $(V, \rho)$  eine endlichdimensionale komplexe Darstellung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Für alle  $g \in G$  ist die lineare Abbildung  $\rho(g): V \rightarrow V$  diagonalisierbar und die Eigenwerte sind Einheitswurzeln.
- (ii) Für  $g, h \in G$  mit  $gh = hg$  gilt, dass  $\rho(g)$  und  $\rho(h)$  simultan diagonalisierbar sind.
- (iii) Ist  $\zeta \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $\rho(g)$ , so ist  $\bar{\zeta}$  ein Eigenwert von  $\rho(g^{-1})$ .

BEMERKUNG 1.7. Die triviale und reguläre Darstellung einer Gruppe  $G$  stehen miteinander in Verbindung. Wir haben bereits am Beispiel der symmetrischen Gruppe gesehen, dass für alle  $g \in G$  die darstellende Matrix  $M_g \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{\text{reg}}(g)_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{k}[G]$  eine Permutationsmatrix ist. Es gilt allgemein

$$(M_g)_{ij} = \begin{cases} 1 & gj = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } i, j \in G.$$

Folglich ist  $\Lambda = \sum_{h \in G} \partial_h$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, denn

$$(1.1) \quad \rho_{\text{reg}}(g)\Lambda = \sum_{h \in G} \rho_{\text{reg}}(g)\partial_h = \sum_{h \in G} \partial_{gh} = \sum_{h' \in G} \partial_{h'} = \Lambda.$$

Also gibt es einen eindimensionalen Untervektorraum  $\text{span}_{\mathbb{k}}(\Lambda) \subset \mathbb{k}[G]$  auf dem  $G$  “trivial” wirkt.

Neben ersten Beispielen von Darstellungen, wollen wir auch ein paar ihrer Anwendungen skizzieren.

BEISPIEL 1.8 (Einheitswurzeln). Es sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Dann ist  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel. Mit anderen Worten,  $n$  ist die kleinste natürliche Zahl, sodass  $\zeta^n = 1$ . Es gibt eine Darstellung der zyklischen Gruppe  $C_n = \langle g \mid g^n = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{C}$  mittels

$$\rho: C_n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \rho(g^n)v = \zeta^n v.$$

Wir wollen nun die Identität  $\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^j = 0$  darstellungstheoretisch beweisen.

Wir setzen  $v = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^j$  und berechnen

$$\rho(g)(v) = \zeta \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^j = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta \zeta^j = \sum_{j=1}^n \zeta^j \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^j = v,$$

wobei wir  $\zeta^n = 1 = \zeta^0$  im Schritt  $(*)$  benutzt haben. Also ist  $\zeta v = \rho(g)v = v$ . Umstellen liefert  $(\zeta - 1)v = 0$ . Da  $\zeta \neq 1$  muss also  $v = 0$  gelten.

**BEISPIEL 1.9** (zyklisches Sieben). Wie eingangs erwähnt erlaubt uns Darstellungstheorie, die Symmetrien eines Systems zu studieren. Diese Symmetrien sind nicht immer offensichtlich, aber potente Mittel zum Lösen mathematischer Fragestellungen, wie die folgende Ausgangssituation zeigt.

*Frage:* Es seien  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahlen größer gleich 2, und  $p \in \mathbb{N}$  ein Primteiler. Wie viele Teilmengen  $T \subset \{1, \dots, n\}$  gibt es, sodass die Summe  $s_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t \in T} t$  ein Vielfaches von  $p$  ist?

Darstellungstheorie erlaubt es uns auf diese Frage eine elegante Antwort zu finden.

*Schritt 1:* Wir benötigen einen Vektorraum, auf dem wir mit einer noch zu bestimmenden Gruppe wirken können. Dazu schreiben wir  $M = \{1, \dots, n\}$  und definieren  $V = \mathbb{C}[\mathfrak{P}(M)]$  als den Vektorraum der von der Potenzmenge von  $M$  erzeugt wird. Das heißt,  $V$  hat eine Basis  $\mathcal{B} = (\partial_T)_{T \subset M}$ , deren Elemente über die Teilmengen von  $M$  indiziert sind.

*Schritt 2:* Wir wollen jetzt eine Darstellung  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$  einer Gruppe  $G$  betrachten, sodass für alle  $T \subset M$  gilt:  $\rho(g)\partial_T = \partial_T$  für alle  $g \in G$  genau dann, wenn  $s_T$  ein Vielfaches von  $p$  ist. Dazu wählen wir  $G \stackrel{\text{def}}{=}} \langle g \mid g^p = e \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  als die zyklische Gruppe der Ordnung  $p$  und setzen  $\zeta \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{2\pi i}{p}}$ . Wir definieren  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$  durch

$$\rho(g^l)\partial_T = \zeta^{s_T \cdot l} \partial_T \quad \text{für alle } T \subset M.$$

Man kann beobachten:

- (i) Es gilt  $\rho(g)\partial_T = \partial_T$  genau dann, wenn  $s_T$  ein Vielfaches von  $p$  ist.
- (ii) Der Untervektorraum  $U = \{v \in V \mid \rho(g)v = v\} = \ker(\rho(g) - \text{id})$  hat eine Basis  $\mathcal{B}' = (\partial_T)_{T \subset M, \text{ sodass } p \mid s_T}$ . Insbesondere ist die gesuchte Zahl  $\dim_{\mathbb{K}} U$ .

*Schritt 3:* Zu dem Untervektorraum  $U \subset V$  gibt es einen "komplementären" Raum  $U' \subset V$ , sodass  $U \oplus U' = V$ . Jeder Vektor  $v \in V$  hat eine eindeutige Zerlegung  $v = u + u'$  mit  $u \in U$  und  $u' \in U'$ . Man kann zeigen, dass  $\phi_{\text{triv}}: U \oplus U' \rightarrow U \oplus U'$ ,  $u + u' \mapsto u$  gegeben ist durch

$$\phi_{\text{triv}} = \frac{1}{p} (\rho(g^0) + \rho(g^1) + \rho(g^2) + \dots + \rho(g^{p-1})).$$

Diese, zu diesem Zeitpunkt ad-hoc eingeführte, Abbildung werden wir im Verlauf des Semesters als den Projektor auf die triviale Darstellung kennen lernen.

*Schritt 4:* Um  $\dim_{\mathbb{K}} U$  zu bestimmen, müssen wir nun versuchen seine Basis möglichst geschickt abzuzählen. Wir definieren die lineare Abbildung  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  via  $f(\partial_T) = 1$

und schreiben  $\alpha_j = |\{T \subset M \mid s_T = j\}|$  für alle  $0 \leq j \leq \frac{n(n+1)}{2}$ . Nun ist

$$\begin{aligned} p \cdot \dim_{\mathbb{k}} U &= f \left( p \cdot \sum_{T \subset M, p|s_T} \partial_T \right) = f \circ \phi_{\text{triv}} \left( p \cdot \sum_{T \subset M} \partial_T \right) \\ &= \alpha_0(\zeta^{0 \cdot 0} + \zeta^{0 \cdot 1} + \dots + \zeta^{0 \cdot (p-1)}) + \alpha_1(\zeta^{1 \cdot 0} + \zeta^{1 \cdot 1} + \dots + \zeta^{1 \cdot (p-1)}) + \\ &\quad \alpha_2(\zeta^{2 \cdot 0} + \zeta^{2 \cdot 1} + \dots + \zeta^{2 \cdot (p-1)}) + \dots + \alpha_{\frac{n(n+1)}{2}}(\zeta^{\frac{n(n+1)}{2} \cdot 0} + \zeta^{\frac{n(n+1)}{2} \cdot 1} + \dots + \zeta^{\frac{n(n+1)}{2} \cdot (p-1)}). \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir umschreiben zu

$$\begin{aligned} p \cdot \dim_{\mathbb{k}} U &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{\frac{n(n+1)}{2}}) \\ &\quad + (\alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \dots + \alpha_{\frac{n(n+1)}{2}} \zeta^{\frac{n(n+1)}{2}}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (\alpha_0 + \alpha_1 \zeta^{p-1} + \dots + \alpha_{\frac{n(n+1)}{2}} \zeta^{\frac{n(n+1)}{2} \cdot (p-1)}). \end{aligned}$$

Setzen wir  $\chi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{\frac{n(n+1)}{2}} x^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . Dann ist

$$p \cdot \dim_{\mathbb{k}} U = \chi(\zeta^0) + \chi(\zeta) + \dots + \chi(\zeta^{p-1}).$$

*Schritt 5:* Mittels des Polynoms  $\chi$  können wir jetzt eine geschlossene Formel für die gesuchte Zahl in Abhängigkeit von  $n$  und  $p$  bestimmen. Direktes Nachrechnen zeigt,

$$\chi(x) = 1 \cdot (1+x) \cdot (1+x^2) \cdot \dots \cdot (1+x^n).$$

Da  $\zeta^p = 1$ , haben wir nun

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) &= ((1+\zeta)(1+\zeta^2) \dots (1+\zeta^{p-1})(1+\zeta^p)) ((1+\zeta^{p+1})(1+\zeta^{p+2}) \dots (1+\zeta^{2p})) \dots \\ &= ((1+\zeta)(1+\zeta^2) \dots (1+\zeta^{p-1})(1+\zeta^p))^{\frac{n}{p}}. \end{aligned}$$

Um den Wert  $(1+\zeta)(1+\zeta^2) \dots (1+\zeta^p)$  zu bestimmen, betrachten wir das Polynom  $x^p - 1 = (x - \zeta)(x - \zeta^2) \dots (x - \zeta^p)$  und erhalten

$$(1+\zeta)(1+\zeta^2) \dots (1+\zeta^p) = -(-1-\zeta)(-1-\zeta^2) \dots (-1-\zeta^p) = -((-1)^p - 1).$$

Analog erhält man  $(1+\zeta^l)(1+\zeta^{2l}) \dots (1+\zeta^{lp}) = (-1)^p + 1$  für alle  $1 \leq l \leq p-1$ .

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:  $p = 2$  und  $p$  ist ungerade. Sei zunächst  $p = 2$ . Dann ist  $\zeta = -1$ ,  $\chi(-1) = 0$  und

$$2 \cdot \dim_{\mathbb{k}} U = (\chi(1) + \chi(-1)) = \chi(1) = 2^n$$

Falls  $p$  ungerade ist, ist  $(-1)^p - 1 = 2$  und somit

$$p \cdot \dim_{\mathbb{k}} U = \chi(\zeta^0) + \chi(\zeta) + \dots + \chi(\zeta^{p-1}) = 2^n + 2^{\frac{n}{p}} + \dots + 2^{\frac{n}{p}} = 2^n + (p-1)2^{\frac{n}{p}}.$$

**Übungsaufgaben aus Woche 1.**

ÜBUNG 1.1. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl.

- (i) Zeigen Sie, dass die Menge  $C_n = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1\}$  eine Untergruppe von  $\mathbb{C}^\times$  ist.
- (ii) Bestimmen Sie alle  $\zeta \in C_n$  mit  $\text{ord}(\zeta) = n$ .

ÜBUNG 1.2. Es sei die Gruppe  $G = \langle i, j \mid i^4 = e, i^2 = j^2, ji = i^3j \rangle$  gegeben. Bestimmen Sie  $\text{ord}(G)$ .

ÜBUNG 1.3. Zeigen Sie, dass die Gruppen  $S_3$  und  $\langle a, b \mid a^2 = e, b^2 = e, aba = bab \rangle$  isomorph sind.

ÜBUNG 1.4. Wir betrachten die reguläre Darstellung  $(\mathbb{C}[C_3], \rho_{\text{reg}})$  der zyklischen Gruppe  $C_3 = \langle g \mid g^3 = e \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Ihre Elemente sind  $e, g, g^2$ .

- (i) Weisen Sie nach, dass die reguläre Darstellung wohldefiniert ist.
- (ii) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen von  $\rho_{\text{reg}}(g)$  und  $\rho_{\text{reg}}(g^2)$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{C}[C_3]$ .
- (iii) Zeigen Sie, dass  $\rho_{\text{reg}}(g)$  diagonalisierbar ist und finden Sie eine Basis aus Eigenvektoren.
- (iv) Es sei  $\Lambda' \in \mathbb{C}[C_3]$  ein Eigenvektor von  $\rho_{\text{reg}}(g)$ . Was ist  $\rho_{\text{reg}}(g^2)(\Lambda')$ ?

ÜBUNG 1.5. Es sei  $(\mathbb{C}[S_3], \rho_{\text{reg}})$  die reguläre Darstellung von  $S_3$ .

- (i) Geben Sie die Permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  in Zykelschreibweise an.
- (ii) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von  $\rho_{\text{reg}}(\sigma)$  bezüglich der Standardbasis.
- (iii) Zeigen Sie, dass  $\rho_{\text{reg}}(\sigma)$  diagonalisierbar ist.
- (iv) Finden Sie einen Vektor  $v \in \mathbb{C}[S_3]$ , sodass  $\rho_{\text{reg}}(\tau)v = \text{sgn}(\tau)v$  für alle  $\tau \in S_3$ .

ÜBUNG 1.6. Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $(V, \rho)$  eine endlichdimensionale komplexe Darstellung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Für alle  $g \in G$  ist die lineare Abbildung  $\rho(g): V \rightarrow V$  diagonalisierbar und die Eigenwerte sind Einheitswurzeln.
- (ii) Für  $g, h \in G$  mit  $gh = hg$  gilt, dass  $\rho(g)$  und  $\rho(h)$  simultan diagonalisierbar sind.
- (iii) Ist  $\zeta \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $\rho(g)$ , so ist  $\bar{\zeta}$  ein Eigenwert von  $\rho(g^{-1})$ .

## 2. Woche 02: Homomorphismen von Darstellungen und das Lemma von Schur

Es gibt kaum eine Theorie, die elementarer ist [als lineare Algebra], trotz der Tatsache, dass Generationen von Professoren und Lehrbuchautoren die Einfachheit dieser Theorie durch höchst unangebrachte Rechnungen mit Matrizen verdunkelt haben.

---

Jean Dieudonné – Grundzüge der modernen Analysis, Band 1

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Homomorphismen von Darstellungen
- (ii) Unterdarstellungen und Quotienten
- (iii) direkte Summen und direkte Summanden
- (iv) zerlegbare und unzerlegbare Darstellungen
- (v) das Fitting-Lemma
- (vi) einfache und halbeinfache Darstellungen
- (vii) das Lemma von Schur

Saunders Mac Lane schrieb 1981 in “History of Abstract Algebra: Origin, Rise and Decline of a Movement”:

*Abstract algebra can be regarded as a cultural movement, which began in Germany immediately after the war (1918–1921) and which went through three clearly marked periods. The first wave of abstraction, 1921–1941, was dominated by Emmy Noether, Emil Artin, and van der Waerden’s book “Moderne Algebra” (1930–1931), and was centered on the concept of ring and ideal. The second wave, 1942–1955, was led by N. Bourbaki under the slogan “What are the morphisms?”, and the third period, 1957–1974, was under the influence of Grothendieck, algebraic geometry, and category theory.*

Nachdem wir uns bisher, wenngleich versteckt, mit (Gruppen-)ringen und einigen ihrer Ideale beschäftigt haben wollen wir nun einen kurzen Abstecher in die “zweite Abstraktionswelle” wagen und uns fragen: Was sind die Abbildungen?

DEFINITION 2.1. Seien  $(V, \rho_V)$  und  $(W, \rho_W)$  zwei Darstellungen einer Gruppe  $G$ . Ein lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  heißt  $G$ -äquivariant oder ein *Homomorphismus von Darstellungen*, wenn

$$(2.1) \quad f \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ f, \quad \text{für alle } g \in G.$$

Man sagt,  $f$  sei ein *Isomorphismus von Darstellungen* wenn eine  $G$ -äquivariante Abbildung  $h: (W, \rho_W) \rightarrow (V, \rho_V)$  existiert, sodass  $h \circ f = \text{id}_V$  und  $f \circ h = \text{id}_W$ .

Eine  $G$ -äquivariante Abbildung  $f: (V, \rho_V) \rightarrow (V, \rho_V)$  wir *Endomorphismus* genannt. Ist  $f$  außerdem invertierbar, so spricht man von einem *Automorphismus*.

Die Bedingung, dass eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen zwei Darstellungen  $(V, \rho_V)$  und  $(W, \rho_W)$  einer Gruppe  $G$ -äquivariant ist, lässt sich in Form eines kommutativen Diagramms visualisieren.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\rho_V(g)} & V \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 W & \xrightarrow{\rho_W(g)} & W
 \end{array}
 \quad \text{für alle } g \in G.$$

Jeder Isomorphismus von Darstellungen ist insbesondere ein Isomorphismus der zugrundeliegenden Vektorräume. Umgekehrt zeigt direktes Nachrechnen, dass ein Homomorphismus von Darstellungen  $f: (V, \rho_V) \rightarrow (W, \rho_W)$  genau dann ein Isomorphismus ist, wenn die lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  invertierbar ist. In diesem Fall haben wir

$$(2.2) \quad f^{-1} \rho_W(g) = f^{-1} \rho_W(g) f f^{-1} = f^{-1} f \rho_V(g) f^{-1} = \rho_V(g) f^{-1} \quad \text{für alle } g \in G.$$

NOTATION 2.2. Sei  $G$  eine Gruppe und  $(V, \rho_V), (W, \rho_W)$  zwei Darstellungen. Wir schreiben jeweils  $\text{Hom}_G((V, \rho_V), (W, \rho_W)), \text{End}_G((V, \rho_V))$  und  $\text{Aut}_G((V, \rho_V))$  für die Mengen aller Homomorphismen, Endomorphismen und Automorphismen.

Wir wollen zunächst ein einfaches Beispiel für Homomorphismen von Darstellungen betrachten.

BEISPIEL 2.3. Die Gruppe  $S_3$  kann aufgefasst werden als die Menge der Bijektionen  $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . Indem wir eine Basis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  von  $\mathbb{k}^3$  fixieren, erhalten wir eine Darstellung

$$\rho: S_3 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^3), \quad \rho(\sigma)b_i = b_{\sigma(i)}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Explizit gilt

$$\begin{aligned}
 \rho(e)_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \rho((1\ 2))_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \rho((2\ 3))_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \rho((1\ 3))_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \rho((1\ 2\ 3))_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho((1\ 3\ 2))_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Die lineare Abbildung

$$\iota: \mathbb{k}_{\text{triv}} \rightarrow \mathbb{k}^3, \quad \lambda \mapsto \lambda(b_1 + b_2 + b_3)$$

ist ein Homomorphismus von Darstellungen:

$$\begin{aligned}
 \iota(\rho_{\text{triv}}(\sigma)\lambda) &= \iota(\lambda) = \lambda(b_1 + b_2 + b_3) = \lambda(b_{\sigma(1)} + b_{\sigma(2)} + b_{\sigma(3)}) = \lambda(\rho(\sigma)(b_1 + b_2 + b_3)) \\
 &= \rho(\sigma)(\lambda(b_1 + b_2 + b_3)) = \rho(\sigma)(\iota(\lambda)).
 \end{aligned}$$

Wir definieren umgekehrt

$$\pi: \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}, \quad b_1 \mapsto 1, \quad b_2 \mapsto 1, \quad b_3 \mapsto 1.$$

Für  $\sigma \in S_3$  und  $b_i \in \mathcal{B}$  ist

$$\pi(\rho(\sigma)b_i) = \pi(b_{\sigma(i)}) = 1 = \rho_{\text{triv}}(\sigma)(1) = \rho_{\text{triv}}(\sigma)(\pi(b_i)).$$

Es folgt, dass  $\pi: \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}$  ein Homomorphismus von Darstellungen ist.

Man beachte  $\pi \circ \iota = 3\text{id}_{\mathbb{k}}$ . Ist also  $\text{char } \mathbb{k} \neq 3$ , besitzt  $\iota$  ein Linksinverses in Form von  $\frac{1}{3}\pi$ . Ein Rechtsinverses kann aus Dimensionsgründen nicht existieren.

ÜBUNG 2.1. Sei  $G$  eine Gruppe und  $(V, \rho_V), (W, \rho_W)$  zwei Darstellungen.

- (i) Zeigen Sie, dass  $\text{Hom}_G((V, \rho_V), (W, \rho_W))$  ein Untervektorraum von  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  ist.
- (ii) Ist auch  $\text{Aut}_G((V, \rho_V)) \subset \text{End}_G((V, \rho_V))$  ein Untervektorraum?
- (iii) Sei  $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Bestimmen Sie  $\dim_{\mathbb{k}} \text{Hom}_G((\mathbb{k}, \rho_{\text{triv}}), (\mathbb{k}[G], \rho_{\text{reg}}))$ .

Die Frage, ob eine lineare Abbildung ein Homomorphismus von Darstellungen ist, lässt sich zum Beispiel anhand von Gleichungssystemen beantworten.

BEISPIEL 2.4. Die Quaternionengruppe ist

$$(2.3) \quad Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = e, j^2 = i^2, ji = i^3j \rangle.$$

Sie hat die 8 Elemente  $Q_8 = \{e, i, i^2, i^3, j, ij, i^2j, i^3j\}$ . Sei  $\mathcal{B}$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^4$ . Wir erhalten eine eindeutige Darstellung von  $Q_8$  auf  $\mathbb{R}^4$  indem wir ihre Werte an den Erzeugern  $i$  und  $j$  festlegen:

$$\rho(i)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(j)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben  $M_i \stackrel{\text{def}}{=} \rho(i)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  und  $M_j \stackrel{\text{def}}{=} \rho(j)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ . Die Endomorphismen der Darstellung  $(\mathbb{R}^4, \rho)$  entsprechen Matrizen  $N \in \text{Mat}_4(\mathbb{R})$ , sodass  $M_i N = N M_i$  und  $M_j N = N M_j$ . Wir berechnen

$$M_i \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 & -a_4 & -b_3 & -b_4 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ -c_3 & -c_4 & -d_3 & -d_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} M_j = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & b_2 & -b_1 \\ a_4 & -a_3 & b_4 & -b_3 \\ c_2 & -c_1 & d_2 & -d_1 \\ c_4 & -c_3 & d_4 & -d_3 \end{pmatrix},$$

$$M_j \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 & -c_2 & -d_1 & -d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ -a_3 & -a_4 & -b_3 & -b_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} M_j = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & -a_1 & a_2 \\ b_3 & -b_4 & -a_3 & a_4 \\ d_1 & -d_2 & -c_1 & c_2 \\ d_3 & -d_4 & -c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$a_1 = a_4 = d_1 = d_4, \quad a_2 = -a_3 = -d_2 = d_3, \quad b_1 = b_4 = -c_1 = -c_4, \quad b_2 = -b_3 = c_2 = -c_3$$

und der Vektorraum der Endomorphismen von  $(\mathbb{R}^4, \rho)$  ist parametrisiert durch

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & -b_2 & b_1 \\ -b_1 & b_2 & a_1 & -a_2 \\ -b_2 & -b_1 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \leq i \leq 2 \right\}.$$

ÜBUNG 2.2. Zeigen Sie, dass die vierdimensionale Darstellung von  $Q_8$  aus Beispiel 2.4 wohldefiniert ist.

Eine andere Möglichkeit  $G$ -äquivalente Abbildungen zu bestimmen besteht darin  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  mit einer Wirkung von  $G$  auszustatten, sodass  $\text{Hom}_G(V, W)$  der Untervektorraum der Invarianten ist. Analog zu Beispiel 1.9, kann man versuchen, vermöge der Gruppenstruktur von  $G$ , einen Projektor  $\phi_{\text{triv}}: \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  zu definieren dessen Bild  $\text{Hom}_G(V, W)$  ist. Dieses Vorgehen ist Gegenstand der nächsten Übungsaufgabe.

ÜBUNG 2.3. Es sei  $(U, \rho_U)$  eine komplexe Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$ . Wir setzen

$$\phi_{triv}: U \longrightarrow U, \quad \phi_{triv}(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_U(g)u.$$

- (i) Begründen Sie, dass  $\phi_{triv}$  eine  $G$ -äquivalente Abbildung ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass  $\phi_{triv}^2 = \phi_{triv}$ .
- (iii) Beweisen Sie, dass  $\rho_U(g)u = u$  für alle  $g \in G$  genau dann, wenn  $u \in \text{im } \phi_{triv}$ .
- (iv) Weisen Sie nach, dass  $\dim_{\mathbb{K}} \text{im } \phi_{triv} = \text{tr}(\phi_{triv})$

Gegeben zweier Darstellung  $(V, \rho_V)$  und  $(W, \rho_W)$  können wir den Vektorraum  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  aller linearer Abbildung zwischen  $V$  und  $W$  betrachten.

- (v) Zeigen Sie, dass  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  eine Darstellung ist, mittels

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)), \quad \rho(g)f = \rho_W(g)f\rho_V(g^{-1})$$

- (vi) Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung  $f: V \longrightarrow W$  ist genau dann  $G$ -äquivalent, wenn  $\phi_{triv}(f) = f$ .

In Beispiel 1.9 haben wir gesehen, dass es einen Untervektorraum einer Darstellung geben kann, der unter der Wirkung abgeschlossen ist. Wir möchten dieses Konzept nun formalisieren.

DEFINITION 2.5. Es sei  $(W, \rho)$  eine Darstellung einer Gruppe  $G$  und  $V \subset W$  ein Untervektorraum, sodass  $\rho(g)v \in V$  für alle  $v \in V$ . Wir schreiben  $\rho|_V: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ ,  $\rho|_V(g)v = \rho(g)v$  für alle  $g \in G$  und  $v \in V$  und nennen das Paar  $(V, \rho|_V)$  eine *Unterdarstellung* von  $(W, \rho)$ .

Falls  $V$  weder ganz  $W$  noch der triviale Vektorraum ist, spricht man von einer *echten* Unterdarstellung.

Man beachte, dass jede Unterdarstellung selbst wieder eine Darstellung ist.

In Beispiel 1.6 haben wir gezeigt, dass die triviale Darstellung eine echte Unterdarstellung der regulären Darstellung ist. In Kürze werden wir versuchen, weitere, möglichst kleine Unterdarstellungen der regulären Darstellung zu finden.

BEISPIEL 2.6. Es sei  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  die Klein'sche Vierergruppe. Wir schreiben  $g = [(1, 0)]$  und  $h = [(0, 1)]$  und beobachten  $G = \{e, g, h, gh\}$ . Die Gruppe  $G$  wirkt auf  $W = \mathbb{C}^2$  mittels

$$\rho(g)b_1 = b_2, \quad \rho(g)b_2 = b_1, \quad \rho(h)b_1 = -b_2, \quad \rho(h)b_2 = -b_1,$$

wobei  $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$  die Standardbasis von  $\mathbb{C}^2$  ist.

Wir setzen  $U = \text{span}_{\mathbb{K}}(b_1 + b_2)$  und berechnen

$$\rho(g)(b_1 + b_2) = b_2 + b_1 \in U, \quad \rho(h)(b_1 + b_2) = -b_2 - b_1 = -(b_1 + b_2) \in U.$$

Demnach ist  $U$  eine Unterdarstellung.

ÜBUNG 2.4. Zeigen Sie, dass die zweidimensionale Darstellung der Klein'schen Vierergruppe aus Beispiel 2.6 wohldefiniert ist und bestimmen Sie alle eindimensionalen Unterdarstellungen.

BEISPIEL 2.7. Wir haben in Beispiel 2.3 eine dreidimensionale Darstellung der symmetrischen Gruppe  $S_3$  auf  $W = \mathbb{C}^3$  definiert. Diese war durch Permutationen der Standardbasis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  gegeben. Explizit ist

$$\rho: S_3 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(W), \quad \rho(\sigma)b_i = b_{\sigma(i)}, \quad \text{für alle } \sigma \in S_3 \text{ und } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Sei  $z = b_1 + b_2 + b_3$ . Auf dem eindimensionalen Untervektorraum  $U = \text{span}_{\mathbb{C}}(z)$  wirkt  $S_3$  trivial; also ist die triviale Darstellung eine Unterdarstellung.

Um eine weitere Unterdarstellung zu finden, bemühen wir einen geometrischen Fakt: Die Gruppe  $S_3$  ist die Symmetriegruppe eines regulären Dreiecks. Führen wir also zunächst ein kleines Gedankenexperiment durch und stellen uns ein reguläres Dreieck vor, das in der  $x$ - $y$ -Ebene des dreidimensionalen Raums liegt. Seine Symmetrien sind durch Spiegelungen und Rotationen gegeben. Diese lassen das orthogonale Komplement der Ebene – die Gerade entlang der  $z$ -Achse – invariant. In unserem Fall haben wir bereits die, der  $z$ -Achse entsprechende, Gerade in Form der eindimensionalen Unterdarstellung  $(U, \rho_{\text{triv}})$  gefunden. Demnach wäre das Analogon zur  $x$ - $y$ -Ebene das orthogonale Komplement  $U^\perp$ . Es ist gegeben durch  $U^\perp = \{(w_1, w_2, w_3) \in W \mid w_1 + w_2 + w_3 = 0\}$ . Man zeigt,  $\rho_{\text{std}} \stackrel{\text{def}}{=} \rho|_{U^\perp}$  definiert eine zweidimensionale Unterdarstellung von  $W$ , die die *Standarddarstellung* genannt wird.

ÜBUNG 2.5. Betrachten Sie die Wirkung von  $S_3$  auf  $W = \mathbb{C}^3$ , die durch Permutation der Standardbasisvektoren gegeben ist.

- (i) Finden Sie drei Vektoren  $q_1, q_2, q_3 \in V = \{(v_1, v_2, v_3) \in W \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$ , sodass  $q_1, q_2, q_3 \neq 0$  und für alle  $\sigma \in S_3$  und  $1 \leq i \leq 3$  ein Zahl  $1 \leq j \leq 3$  existiert, sodass  $\rho(\sigma)q_i = q_j$ .
- (ii) Begründen Sie, dass  $q_1, q_2$  und  $q_3$  die Ecken eines regulären Dreiecks bilden.

Aussagen über Unter- und Quotientenstrukturen lassen sich oftmals aus der linearen Algebra direkt auf Darstellungen von Gruppen übertragen.

LEMMA 2.8. Sei  $f: V \rightarrow W$  ein Homomorphismus von Darstellungen. Dann sind sein Kern  $\ker f \subset V$  und Bild  $\text{im } f \subset W$  Unterdarstellungen von  $V$ , beziehungsweise  $W$ .

BEWEIS. Sei  $v \in \ker f$ . Dann ist

$$f(\rho_V(g)v) = \rho_W(g)(f(v)) = \rho_W(g)(0) = 0.$$

Somit ist  $\ker f$  eine Unterdarstellung.

Nehmen wir nun an, es sei  $w \in \text{im } f$ . Dann gibt es ein  $v \in V$ , sodass  $f(v) = w$ . Aus

$$\rho_W(g)w = \rho_W(g)(f(v)) = f(\rho_V(g)v) \in \text{im } f$$

für alle  $g \in G$  folgt die Aussage. □

LEMMA 2.9. Es sei  $(V, \rho)$  eine Darstellung einer Gruppe  $G$  und  $U \subset V$  eine Unterdarstellung. Der Quotientenvektorraum  $V/U$  ist eine Darstellung von  $G$  mittels

$$(2.5) \quad \tau: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V/U), \quad \tau(g)[v] = [\rho(g)v].$$

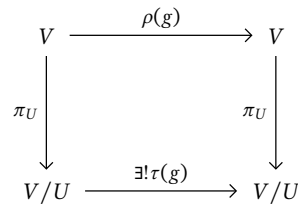
Die kanonische Abbildung  $\pi_U: V \rightarrow V/U, v \mapsto [v]$  ist  $G$ -äquivariant.

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass  $\tau: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V/U)$  ein wohldefinierter Homomorphismus von Gruppen ist. Dazu benutzen wir kommutierende Diagramme. Sei  $g \in G$ . Dann ist

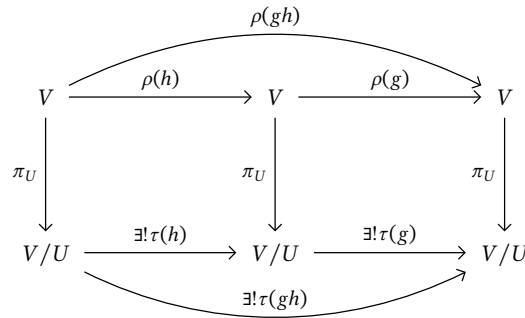
$$(\pi_U \rho(g))u = \pi_U(\rho(g)(u)) = 0 \quad \text{für alle } u \in U.$$

Der erste Homomorphiesatz besagt, dass es eine eindeutige lineare Abbildung  $\tau(g): V/U \rightarrow V/U$  gibt, sodass  $\tau(g)\pi_U = \pi_U \rho(g)$ . Folglich ist  $\tau: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V/U)$  wohldefiniert. Das

von uns benutzte Argument drückt sich in der Kommutativität des nächsten Diagramm aus:



Um zu beweisen, dass es sich bei  $\tau$  außerdem um einen Gruppenhomomorphismus handelt wählen wir Elemente  $g, h \in G$  und betrachten



Der Homomorphiesatz garantiert, dass der untere Halbkreis kommutiert, da

$$\tau(gh)\pi_U = \pi_U\rho(gh) = \pi_U\rho(g)\rho(h) = \tau(g)\pi_U\rho(h) = \tau(g)\tau(h)\pi_U.$$

Aus der Eindeutigkeit der jeweiligen Abbildungen folgt,  $\tau(gh) = \tau(g)\tau(h)$ .

Weiterhin ist  $\pi_U: V \rightarrow V/U$  per Konstruktion der Wirkung von  $G$  auf  $V/U$  ein Homomorphismus von Darstellungen. □

**ÜBUNG 2.6.** Betrachten Sie die Darstellung  $V$  von  $S_3$  auf  $\mathbb{C}^3$  aus Beispiel 2.7. Wir schreiben  $U = \text{span}_{\mathbb{C}}((b_1 + b_2 + b_3))$  für ihre eindimensionale Unterdarstellung. Zeigen Sie, dass der Quotient  $V/U$  isomorph zur Standarddarstellung ist.

Direkte Summen spielen wie auch in der linearen Algebra eine wichtige Rolle in der Darstellungstheorie.

**DEFINITION 2.10.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $U, V \subset W$  zwei Unterdarstellungen. Man nennt  $U$  und  $V$  *direkte Summanden* von  $W$  und  $W$  die (*innere*) *direkte Summe* von  $U$  und  $V$ , wenn  $U \cap V = \{0\}$  und  $U + V = W$ . In diesem Fall schreibt man  $U \oplus V = W$ .

Falls eine Darstellung  $W$  in eine direkte Summe  $U \oplus V$  von Unterdarstellungen zerfällt, ist es typisch  $V$  und  $U$  als die *Komplemente* von  $U$  beziehungsweise  $V$  zu bezeichnen. Dies ist nicht als mengentheoretischer Begriff zu verstehen, sondern soll verdeutlichen, dass  $U \cap V = \{0\}$  trivial ist und  $U + V = W$  die ganze Darstellung.

**DEFINITION 2.11.** Eine Darstellung  $\{0\} \neq W$  einer Gruppe  $G$  heißt *zerlegbar*, wenn sie die direkte Summe zweier echter Unterdarstellungen  $\{0\} \subsetneq U, V \subsetneq W$  ist. Ansonsten spricht man von einer *unzerlegbaren* Darstellung.

Einen (endlichdimensionalen) Vektorraum können wir durch Abspaltung direkter Summanden immer weiter in kleinere Blöcke zerlegen, bis er schließlich eine direkte

Summe eindimensionaler Vektorräume ist<sup>1</sup>. Diese sind also gewissermaßen die kleinsten Bestandteile unserer Theorie. Alles Andere baut auf ihnen auf.

LEMMA 2.12. *Jede endlichdimensionale Darstellung  $W$  einer Gruppe  $G$  ist eine endliche direkte Summe unzerlegbarer Darstellungen.*

BEWEIS. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion nach der Dimension  $n = \dim_{\mathbb{k}} W$ . Sei  $n = 0$  so ist  $W$  die leere direkte Summe unzerlegbarer Unterdarstellungen. Nehmen wir also an, die Aussage gelte für alle Darstellungen der Dimension kleiner gleich  $n$  und  $W$  sei  $(n + 1)$ -dimensional. Ist  $W$  unzerlegbar, so müssen wir nichts zeigen. Falls aber  $W = U \oplus V$  eine direkte Summe von echten Unterdarstellungen ist, so gilt  $\dim_{\mathbb{k}} U \leq n$  und  $\dim_{\mathbb{k}} V \leq n$ . Insbesondere sind nach Induktionsannahme  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_i$  und  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_j$  direkte Summen unzerlegbarer Darstellungen und damit auch  $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_i \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_j$ .  $\square$

In der Praxis kann es mitunter schwierig sein, herauszufinden wann eine Darstellung unzerlegbar ist. Eine Möglichkeit ergibt sich, indem man ihre Endomorphismen untersucht.

WIEDERHOLUNG. Ein Ring ist ein Quintupel  $(R, +, 0_R, \cdot, 1_R)$ , bestehend aus einer abelschen Gruppe  $(R, +, 0_R)$ <sup>2</sup>, wobei wir  $- + - : R \times R \rightarrow R$  als *Addition* und das neutrale Element  $0_R \in R$  als *Null* bezeichnen, einer Multiplikation  $- \cdot - : R \times R \rightarrow R$  und einem Einselement  $1_R \in R \setminus \{0_R\}$ <sup>3</sup>, sodass die folgenden Axiome zutreffen.

(i) Die Multiplikation ist *distributiv*. Für alle  $a, b, c, d \in R$  gilt

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a \cdot c) + (a \cdot d) + (b \cdot c) + (b \cdot d).$$

(ii) Die Multiplikation ist *assoziativ*. Es ist

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \text{für alle } a, b, c \in R.$$

(iii) Die Multiplikation ist *unital*. Wir haben für alle  $a \in R$

$$a \cdot 1_R = a = 1_R \cdot a.$$

Ein Element  $a \in R$  heißt *Einheit*, beziehungsweise *invertierbar*, wenn es ein  $b \in R$  gibt, sodass  $a \cdot b = 1_R = b \cdot a$ . Man schreibt  $R^\times$  für die Menge der Einheiten. Ist  $R^\times = R \setminus \{0_R\}$ , nennt man  $R$  einen *Schiefkörper*. Im Fall dass die Multiplikation außerdem *kommutativ* ist, also  $a \cdot b = b \cdot a$  für alle  $a, b \in R$ , bezeichnet man  $R$  als einen *Körper*.

WIEDERHOLUNG. Sei Ring  $(R, +, 0_R, \cdot, 1_R)$  ein Ring. Ein *Linksideal* ist eine Untergruppe  $I \subset R$ , sodass  $a \cdot i \in I$  für alle  $a \in R$  und  $i \in I$ . Gilt hingegen  $i \cdot a \in I$ , spricht man von einem *Rechtsideal*. Sowohl  $\{0\}$  als auch  $R$  sind Linksideale und Rechtsideale. Ein Linksideal  $I \subsetneq R$  bezeichnet man als ein *echtes* Linksideal. Es heißt *maximal*, wenn für jedes Linkideal  $I \subset J \subsetneq R$  gilt, dass  $I = J$ .

Wir nennen  $R$  *lokal*, wenn es ein eindeutiges maximales Linksideal gibt. Man zeigt, dass dieses Ideal automatisch das einzige (und damit eindeutige) maximale Rechtsideal ist.

<sup>1</sup>Da auch unendlichdimensionale Vektorräume eine Basis haben können diese ebenfalls als direkte Summe von eindimensionalen Vektorräumen aufgefasst werden. Hier kann allerdings nicht durch sukzessives Abspalten einer Dimension argumentiert werden.

<sup>2</sup>Man nennt eine Gruppe  $R$  *abelsch*, wenn ihre Gruppenoperation  $- + - : R \times R \rightarrow R$  *kommutativ* ist. Also  $a + b = b + a$  für alle  $a, b \in R$  gilt.

<sup>3</sup>Manche Autoren erlauben  $1_R = 0_R$ .

Ein hilfreiches Kriterium um zu zeigen, dass ein Ring lokal ist, sind die folgenden Lemmata. Beweise und eine ausführlichere Diskussion lokaler Ringe findet sich zum Beispiel in [Lam01, Chapter 7].

LEMMA 2.13. *Ein Ring  $R$  ist genau dann lokal, wenn für zwei Nichteinheiten  $a, b \in R$  gilt, dass  $a + b$  ebenfalls keine Einheit ist.*

*In diesem Fall ist die Menge  $\{a \in R \mid a \text{ ist keine Einheit}\}$  das eindeutige maximale Ideal.*

LEMMA 2.14. *Sei  $R$  ein Ring. Falls für jede Nichteinheit  $a \in R \setminus R^\times$  eine natürliche  $n \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $a^n = 0$ , dann ist  $R$  lokal.*

Der Zusammenhang zwischen lokalen Ringen und der Unzerlegbarkeit von endlichdimensionalen Darstellungen ergibt sich aus dem Lemma von Fitting.

LEMMA 2.15 (Fitting-Lemma). *Sei  $V$  eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe  $G$  und  $f \in \text{End}_G(V)$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $V = \ker f^n \oplus \text{im } f^n$ .*

BEWEIS. Es gibt eine aufsteigende Kette

$$\ker f^1 \subset \ker f^2 \subset \ker f^3 \subset \dots$$

Da  $V$  endlichdimensional ist, muss es ein  $n \in \mathbb{N}$  geben, sodass  $\ker f^n = \ker f^{n+1}$ . Daraus folgt per Induktion, dass  $\ker f^{n+l} = \ker f^{n+1+(l-1)} = \ker f^n$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ .

Ebenso gibt es die absteigende Kette

$$\text{im } f^1 \supset \text{im } f^2 \supset \text{im } f^3 \supset \dots$$

und ein  $m \in \mathbb{N}$ , sodass  $\text{im } f^m = \text{im } f^{m+l}$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ . Wir setzen  $j = \max\{n, m\}$ . Sei  $z \in \ker f^j \cap \text{im } f^j$ . Dann ist  $z = f^j(a)$  für ein  $a \in V$  und  $0 = f^j(z) = f^{2j}(a)$ . Damit ist  $a \in \ker f^{2j} = \ker f^j$ , was  $z = 0$  impliziert.

Gegeben  $x \in V$ , existiert ein  $y \in V$ , sodass  $f^j(x) = f^{2j}(y)$ , da  $\text{im } f^j = \text{im } f^{2j}$ . Nun ist  $f^j(x - f^j(y)) = 0$  und  $x = (x - f^j(y)) + f^j(y)$ .  $\square$

KOROLLAR 2.16. *Eine endlichdimensionale Darstellung  $V$  von  $G$  ist genau dann unzerlegbar, wenn  $\text{End}_G(V)$  ein lokaler Ring ist.*

BEWEIS. Angenommen  $V$  ist unzerlegbar und  $f: V \rightarrow V$  eine  $G$ -äquivalente Abbildung. Wegen des Fitting-Lemmas existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $V = \ker f^n \oplus \text{im } f^n$ . Da  $V$  unzerlegbar ist, muss entweder  $V = \text{im } f^n$  gelten und  $f$  ein Automorphismus sein oder  $V = \ker f^n$  und  $f$  demnach nilpotent. Aus Lemma 2.14 folgt, dass  $\text{End}_G(V)$  lokal ist.

Sei umgekehrt  $V = U \oplus W$  zerlegbar. Dann lässt sich jedes  $v \in V$  schreiben als  $v = u + w$  für eindeutige  $u \in U$  und  $w \in W$ . Die Abbildungen  $\phi_U: V \rightarrow V, u + w \mapsto u$  und  $\phi_W: V \rightarrow V, u + w \mapsto w$  sind  $G$ -äquivalent und keine Einheiten, da  $\ker \phi_U = W$  und  $\ker \phi_W = U$ . Es gilt jedoch  $\text{id}_V = \phi_U + \phi_W$ . Demnach kann  $\text{End}_G(V)$  wegen Lemma 2.13 nicht lokal sein.  $\square$

DEFINITION 2.17. *Eine Darstellung  $\{0\} \neq V$  einer Gruppe  $G$  heißt einfach oder irreduzibel, falls es keine echte Unterdarstellung gibt.*

Man spricht von einer *reduziblen* Darstellung, falls  $V$  eine echte Unterdarstellung besitzt.

Die triviale Darstellung ist, wie jede weitere eindimensionale Darstellung, irreduzibel.

DEFINITION 2.18. *Eine Darstellung  $V$  einer Gruppe  $G$  heißt halbeinfach oder vollständig reduzibel, wenn sie eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen ist.*

LEMMA 2.19 (Schur). *Seien  $V$  und  $W$  zwei irreduzible Darstellungen einer beliebigen Gruppe  $G$ .*

- (i) *Jeder Homomorphismus von Darstellungen  $f: V \rightarrow W$  ist entweder die Nullabbildung oder invertierbar.*
- (ii) *Die Endomorphismen  $\text{End}_G(V)$  bilden einen Schiefkörper. Ist  $\dim_{\mathbb{k}} V$  endlich und  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen, so gilt  $\text{End}_G(V) = \{\lambda \text{id}_V \mid \lambda \in \mathbb{k}\}$ .*

BEWEIS. (i) Sei  $f: V \rightarrow W$  nicht die Nullabbildung. Nach Lemma 2.8 sind  $\ker f \subset V$  und  $\text{im } f \subset W$  Unterdarstellungen. Da  $V$  einfach und  $f$  nicht die Nullabbildung ist, muss  $\ker f = \{0\}$  gelten. Ebenso folgt  $\text{im } f = W$  aus der Einfachheit von  $W$ . Also ist  $f$  ein Isomorphismus.

- (ii) Die Endomorphismen  $\text{End}_G(V)$  bilden einen Ring mit Verkettung als Multiplikation. Nach dem ersten Teil des Lemmas ist jedes Element  $f \in \text{End}_G(V)$  entweder invertierbar oder die Nullabbildung. Also ist  $\text{End}_G(V)$  ein Schiefkörper.

Sei nun  $\dim_{\mathbb{k}} V < \infty$  und  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen. Jeder Endomorphismus von Darstellungen  $f: V \rightarrow V$  hat einen Eigenwert  $\lambda$ . Betrachten wir also den Eigenraum  $U \stackrel{\text{def}}{=} \ker(f - \lambda \text{id}_V) \subset V$ . Für jedes  $g \in G$  und  $u \in U$  gilt

$$\begin{aligned} (f - \lambda \text{id}_V)(\rho(g)u) &= f(\rho(g)u) - \lambda(\rho(g)u) = \rho(g)(fu) - \rho(g)(\lambda u) \\ &= \rho(g)(\lambda u) - \rho(g)(\lambda u) = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $U$  eine Unterdarstellung<sup>4</sup> von  $V$  und, da  $\dim_{\mathbb{k}} U \geq 1$  und  $V$  einfach ist, folgt  $U = V$ . Demnach ist aber  $f = \lambda \text{id}_V$  für ein  $\lambda \in \mathbb{k}$ . □

ÜBUNG 2.7. *Sei  $\mathbb{k}$  ein Körper der Charakteristik 3 und  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  eine Basis von  $\mathbb{k}^3$ . Die Gruppe  $S_3$  wirkt durch Permutationen*

$$\rho: S_3 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^3), \quad \rho(\sigma)b_i = b_{\sigma(i)}.$$

Es sei  $V = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{k}^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$ .

- (i) *Zeigen Sie, dass  $V$  unzerlegbar aber nicht irreduzibel ist.*
- (ii) *Begründen Sie, dass  $\text{End}_{S_3}(V)$  ein Körper ist.*

ÜBUNG 2.8. *Wir werden in den nächsten Wochen zeigen, dass jede Darstellung einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 halbeinfach ist. Dies vorwegnehmend, soll Schur's Lemma benutzt werden, um die folgenden Aussagen zu beweisen.*

- (i) *Die Standarddarstellung von  $S_3$  ist einfach.*
- (ii) *Die 4-dimensionale reelle Darstellung von  $Q_8$  aus Beispiel 2.4 ist einfach.*
- (iii) *Fasst man die 4-dimensionale Darstellung von  $Q_8$  aus Beispiel 2.4 über den komplexen Zahlen auf, so ist sie nicht einfach.*

ÜBUNG 2.9. *Beweisen Sie, dass jede einfache endlichdimensionale Darstellung einer zyklischen Gruppe  $G$  eindimensional sein muss.*

---

<sup>4</sup>Alternativ können wir wie folgt argumentieren: Die Abbildungen  $f$  und  $\lambda \text{id}_V$  sind  $G$ -äquivariant und deshalb auch ihre Differenz  $f - \lambda \text{id}_V$ . Aus Lemma 2.8 folgt, dass  $U$  eine Unterdarstellung ist.

**Übungsaufgaben aus Woche 2.**

ÜBUNG 2.1. Sei  $G$  eine Gruppe und  $(V, \rho_V), (W, \rho_W)$  zwei Darstellungen.

- (i) Zeigen Sie, dass  $\text{Hom}_G((V, \rho_V), (W, \rho_W))$  ein Untervektorraum von  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  ist.
- (ii) Ist auch  $\text{Aut}_G((V, \rho_V)) \subset \text{End}_G((V, \rho_V))$  ein Untervektorraum?
- (iii) Sei  $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Bestimmen Sie  $\dim_{\mathbb{k}} \text{Hom}_G((\mathbb{k}, \rho_{\text{triv}}), (\mathbb{k}[G], \rho_{\text{reg}}))$ .

ÜBUNG 2.2. Zeigen Sie, dass die vierdimensionale Darstellung von  $Q_8$  aus Beispiel 2.4 wohldefiniert ist.

ÜBUNG 2.3. Es sei  $(U, \rho_U)$  eine komplexe Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$ . Wir setzen

$$\phi_{\text{triv}}: U \longrightarrow U, \quad \phi_{\text{triv}}(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_U(g)u.$$

- (i) Begründen Sie, dass  $\phi_{\text{triv}}$  eine  $G$ -äquivalente Abbildung ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass  $\phi_{\text{triv}}^2 = \phi_{\text{triv}}$ .
- (iii) Beweisen Sie, dass  $\rho_U(g)u = u$  für alle  $g \in G$  genau dann, wenn  $u \in \text{im } \phi_{\text{triv}}$ .
- (iv) Weisen Sie nach, dass  $\dim_{\mathbb{k}} \text{im } \phi_{\text{triv}} = \text{tr}(\phi_{\text{triv}})$

Gegeben zweier Darstellung  $(V, \rho_V)$  und  $(W, \rho_W)$  können wir den Vektorraum  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  aller linearer Abbildung zwischen  $V$  und  $W$  betrachten.

(v) Zeigen Sie, dass  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  eine Darstellung ist, mittels

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)), \quad \rho(g)f = \rho_W(g)f\rho_V(g^{-1})$$

(vi) Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung  $f: V \longrightarrow W$  ist genau dann  $G$ -äquivalent, wenn  $\phi_{\text{triv}}(f) = f$ .

ÜBUNG 2.4. Zeigen Sie, dass die zweidimensionale Darstellung der Klein'schen Vierergruppe aus Beispiel 2.6 wohldefiniert ist und bestimmen Sie alle eindimensionalen Unterdarstellungen.

ÜBUNG 2.5. Betrachten Sie die Wirkung von  $S_3$  auf  $W = \mathbb{C}^3$ , die durch Permutation der Standardbasisvektoren gegeben ist.

- (i) Finden Sie drei Vektoren  $q_1, q_2, q_3 \in V = \{(v_1, v_2, v_3) \in W \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$ , sodass  $q_1, q_2, q_3 \neq 0$  und für alle  $\sigma \in S_3$  und  $1 \leq i \leq 3$  ein Zahl  $1 \leq j \leq 3$  existiert, sodass  $\rho(\sigma)q_i = q_j$ .
- (ii) Begründen Sie, dass  $q_1, q_2$  und  $q_3$  die Ecken eines regulären Dreiecks bilden.

ÜBUNG 2.6. Betrachten Sie die Darstellung  $V$  von  $S_3$  auf  $\mathbb{C}^3$  aus Beispiel 2.7. Wir schreiben  $U = \text{span}_{\mathbb{C}}((b_1 + b_2 + b_3))$  für ihre eindimensionale Unterdarstellung. Zeigen Sie, dass der Quotient  $V/U$  isomorph zur Standarddarstellung ist.

ÜBUNG 2.7. Sei  $\mathbb{k}$  ein Körper der Charakteristik 3 und  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  eine Basis von  $\mathbb{k}^3$ . Die Gruppe  $S_3$  wirkt durch Permutationen

$$\rho: S_3 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^3), \quad \rho(\sigma)b_i = b_{\sigma(i)}.$$

Es sei  $V = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{k}^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $V$  unzerlegbar aber nicht irreduzibel ist.
- (ii) Begründen Sie, dass  $\text{End}_{S_3}(V)$  ein Körper ist.

ÜBUNG 2.8. Wir werden in den nächsten Wochen zeigen, dass jede Darstellung einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 halbeinfach ist. Dies vorwegnehmend, soll Schur's Lemma benutzt werden, um die folgenden Aussagen zu beweisen.

- (i) Die Standarddarstellung von  $S_3$  ist einfach.
- (ii) Die 4-dimensionale reelle Darstellung von  $Q_8$  aus Beispiel 2.4 ist einfach.
- (iii) Fasst man die 4-dimensionale Darstellung von  $Q_8$  aus Beispiel 2.4 über den komplexen Zahlen auf, so ist sie nicht einfach.

ÜBUNG 2.9. Beweisen Sie, dass jede einfache endlichdimensionale Darstellung einer zyklischen Gruppe  $G$  eindimensional sein muss.

### 3. Woche 03: Algebren und Moduln

All day he sits at his desk and scribbles, scribbles, scribbles. Then, at the end of the day, he takes the sheets of paper he's scribbled on, scrunges them all up, and throws them in the trash can.

---

*John von Neumann's housekeeper*

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Tensorprodukte
- (ii) Dualräume
- (iii) Algebren
- (iv) Moduln

Indem wir eine Gruppe  $G$  linearisieren, also den Vektorraum  $\mathbb{k}[G]$  betrachten, erhalten wir die Gruppenalgebra. Ihre Multiplikation ist von der Gruppenoperation von  $G$  abgeleitet. Wir werden zeigen: Darstellungen von  $G$  können äquivalent als  $\mathbb{k}[G]$ -Moduln aufgefasst werden. Dieser Standpunkt erlaubt es uns, Zerlegungen der regulären Darstellung zu untersuchen und mit idempotenten Elementen in Verbindung zu bringen.

Wir beginnen mit einer Wiederholung des Tensorbegriffs aus der linearen Algebra.

WIEDERHOLUNG. Seien  $V, W$  zwei  $\mathbb{k}$ -Vektorräume.

- (i) Das *Tensorprodukt*  $V \otimes_{\mathbb{k}} W$  ist ein Vektorraum der Dimension  $(\dim_{\mathbb{k}} V) \cdot (\dim_{\mathbb{k}} W)$ . Ergibt sich der Grundkörper aus dem Kontext, schreibt man  $V \otimes W \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes_{\mathbb{k}} W$ .
- (ii) Es gibt eine *bilineare* Abbildung

$$- \otimes -: V \times W \longrightarrow V \otimes W, \quad (v, w) \longmapsto v \otimes w.$$

Die Elementes ihres Bildes werden *elementare Tensoren* genannt.

Man beachte, dass  $v \otimes w$  ein *Repräsentant* einer Äquivalenzklasse ist. Die Äquivalenzrelationen beruhen auf den Rechenregeln für Bilinearformen. Für alle  $v, v' \in V$ ,  $w, w' \in W$  und  $\lambda \in \mathbb{k}$  gilt

$$\begin{aligned} (v + v') \otimes (w + w') &= v \otimes w + v' \otimes w + v \otimes w' + v' \otimes w', \\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w). \end{aligned}$$

- (iii) Jedes Element von  $V \otimes W$  ist eine *endliche* Linearkombination elementarer Tensoren  $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$ , wobei  $v_i \in V$  und  $w_i \in W$ . Elementare Tensoren sind eine aufspannende Teilmenge des Tensorprodukts aber im Allgemeinen keine Basis.
- (iv) Gegeben Basen  $\mathcal{B}_V$  von  $V$  und  $\mathcal{C}_W$  von  $W$  ist die Menge  $\{b \otimes c \mid b \in \mathcal{B}_V, c \in \mathcal{C}_W\}$  eine Basis von  $V \otimes W$ .
- (v) Das Paar  $(V \otimes W, - \otimes -)$  erfüllt die *universelle Eigenschaft des Tensorprodukts*. Für jede bilineare Abbildung  $b: V \times W \longrightarrow U$  gibt es eine eindeutige lineare Abbildung  $f: V \otimes W \longrightarrow U$ , sodass  $f(v \otimes w) = b(v, w)$  für alle  $v \in V, w \in W$ . Universelle Eigenschaften werden oft durch kommutierende Diagramme

beschrieben. In diesem Fall haben wir:

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b \text{ (bilinear)}} & U \\ \downarrow \scriptstyle \text{--}\otimes\text{--} & \nearrow \scriptstyle \exists! f \text{ (linear)} & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

(vi) Das Tensorprodukt ist *funktoriell*. Das bedeutet, neben Vektorräumen können wir auch Homomorphismen tensorieren. Sind  $f: V \rightarrow V'$  und  $g: W \rightarrow W'$  lineare Abbildungen, so ist die Abbildung

$$V \times W \rightarrow V' \otimes W', \quad (v, w) \mapsto (f(v) \otimes g(w))$$

bilinear. Gemäß der universellen Eigenschaft gibt es eine eindeutige *lineare* Abbildung

$$(3.2) \quad f \otimes g: V \otimes W \rightarrow V' \otimes W', \quad v \otimes w \mapsto f(v) \otimes g(w).$$

In der Sprache der kommutierenden Diagramme folgt die Existenz (und Eindeutigkeit) von  $f \otimes g$  aus:

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f \times g \text{ (linear)}} & V' \times W' \\ \downarrow \scriptstyle \text{--}\otimes\text{--} & \searrow \scriptstyle (v,w) \mapsto v \otimes w & \downarrow \scriptstyle \text{--}\otimes\text{--} \\ V \otimes W & \xrightarrow{\exists! f \otimes g \text{ (linear)}} & V' \otimes W' \end{array}$$

Für gewöhnlich gibt man den Wert linearer Abbildungen auf Tensorprodukten wie auch in Gleichung (3.2), nur für Elementartensoren an. Da diese eine aufspannende Teilmenge bilden, gibt es eine eindeutige lineare Fortsetzung falls die Abbildung wohldefiniert ist.

*Negativbeispiel:* Die Zuordnung

$$f: \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad v \otimes w \mapsto v$$

induziert keine wohldefinierte lineare Abbildung, da

$$\lambda v = f((\lambda v) \otimes w) = f(v \otimes (\lambda w)) = v$$

für alle  $v, w \in \mathbb{C}^2$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

(vii) Gegeben dreier Vektorräume  $U, V, W$  kann man die dreifachen Tensorprodukte  $(U \otimes V) \otimes W$  und  $U \otimes (V \otimes W)$  betrachten. Diese sind zwar nicht gleich, es gibt aber einen, *Assoziator* genannten, kanonischen Isomorphismus

$$\alpha_{U,V,W}: (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W).$$

Wir werden der Übersichtlichkeit halber bei iterierten Tensorprodukten auf die Klammersetzung verzichten.

(viii) Für jeden Vektorraum  $V$  gibt es kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathbb{k} \otimes V &\rightarrow V, & \lambda \otimes v &\mapsto \lambda v, \\ V \otimes \mathbb{k} &\rightarrow V, & v \otimes \lambda &\mapsto \lambda v. \end{aligned}$$

Man nennt sie *Links- beziehungsweise Rechtsunitoren*. Wir werden diese Isomorphismen, wie auch das Klammern des Tensorprodukts, implizit verwenden<sup>5</sup>.

(ix) Der *Tensor-Flip*

$$\sigma_{V,W}: V \otimes W \longrightarrow W \otimes V, \quad v \otimes w \longrightarrow w \otimes v$$

vertauscht die Reihenfolge der Tensoranden. Das wir für den Tensor-Flip den Buchstaben “ $\sigma$ ” verwenden, der sonst für Elemente der symmetrischen Gruppe steht ist kein Zufall: Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  und Vektorraum  $V$  gibt es eine Darstellung  $\rho: S_n \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V^{\otimes n})$  von  $S_n$  auf der  $n$ -fachen Tensorpotenz  $V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes \dots \otimes V$ , die eindeutig bestimmt ist durch

$$\rho((i \ i + 1)) = \text{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \sigma_{V,V} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n-i-1}} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n - 1.$$

Siehe Übung 3.1.

(x) Eine wichtige Rechentechnik für Tensorprodukte ergibt sich aus der sogenannten *Tensor-Hom-Adjunktion*. Für alle Tripel an Vektorräumen  $U, V, W$  gibt es (natürliche) Isomorphismen

$$(3.4a) \quad \begin{aligned} \varphi: \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U \otimes V, W) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)) \\ \varphi(f)u &= (v \mapsto f(u \otimes v)), \end{aligned}$$

$$(3.4b) \quad \begin{aligned} \varphi^{-1}: \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(U \otimes V, W) \\ \varphi^{-1}(g)(u \otimes v) &= g(u)v. \end{aligned}$$

Wir schreiben  $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  für den Dualraum von  $V$ . Ist  $\dim_{\mathbb{k}} V = n$  endlich und  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  ist eine Basis, existiert eine Basis des Dualraums  $\mathcal{B}^* \stackrel{\text{def}}{=} (\beta_1, \dots, \beta_n)$  mit

$$\beta_i: V \longrightarrow \mathbb{k}, \quad \beta_i(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle  $1 \leq i \leq n$ . Es gilt

$$(3.5) \quad v = \sum_{i=1}^n \beta_i(v)b_i \quad \text{und} \quad \gamma = \sum_{i=1}^n \gamma(b_i)\beta_i$$

für alle  $v \in V$  und  $\gamma \in V^*$ . Man nennt das Paar  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$  ein *Paar dualer Basen*.

(xi) Die *Evaluationsabbildungen*

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \text{ev}_V^r: V^* \otimes V &\longrightarrow \mathbb{k}, & \gamma \otimes v &\longmapsto \gamma(v), \\ \text{ev}_V^l: V \otimes V^* &\longrightarrow \mathbb{k}, & v \otimes \gamma &\longmapsto \gamma(v). \end{aligned}$$

sind linear.

(xii) Ist  $V$  endlichdimensional und  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$  ein Paar dualer Basen von  $V$ , so gibt es *Coevaluationsabbildungen*

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \text{coev}_V^r: \mathbb{k} &\longrightarrow V \otimes V^*, & 1 &\longmapsto \sum_{i=1}^n b_i \otimes \beta_i, \\ \text{coev}_V^l: \mathbb{k} &\longrightarrow V^* \otimes V, & 1 &\longmapsto \sum_{i=1}^n \beta_i \otimes b_i, \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass Coevaluationsabbildungen von der Wahl der dualen Basen unabhängig sind.

<sup>5</sup>Der Prozess Assoziatoren und Unitoren durch Identitätsmorphismen zu ersetzen wird “Striktifizierung” genannt. Eine detaillierte Beschreibung ist in [ML98] oder [?] zu finden.

(xiii) Für jeden endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  mit dualen Basen  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$  gibt es einen Isomorphismus

$$(3.8a) \quad \begin{aligned} \vartheta: \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) &\longrightarrow V^* \otimes W \\ \vartheta(f) &= \sum_{i=1}^n \beta_i \otimes f(b_i) \end{aligned}$$

$$(3.8b) \quad \begin{aligned} \vartheta^{-1}: V^* \otimes W &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \\ \vartheta^{-1}(\gamma \otimes w) &= (v \mapsto \gamma(v)w) \end{aligned}$$

(xiv) Ist  $\dim_{\mathbb{k}} V < \infty$  gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$(3.9) \quad \text{can}_V \stackrel{\text{def}}{=} (\text{id}_{V^*} \otimes \text{ev}_V^r) \circ (\text{coev}_V^l \otimes \text{id}_V): V \longrightarrow V^{**}.$$

Dieser ordnet jedem Vektor  $v \in V$  das Funktional

$$\text{can}_V(v) = \zeta_v: V^* \longrightarrow \mathbb{k}, \quad \beta \mapsto \beta(v)$$

zu.

(xv) Sei  $f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Es gilt

$$\text{tr } f = \text{ev}^l \circ (f \otimes \text{id}_{V^*}) \circ \text{coev}^r = \text{ev}^r \circ (\text{id}_{V^*}) \circ \text{coev}^l.$$

ÜBUNG 3.1. Sei  $V$  ein dreidimensionaler reeller Vektorraum dessen Standardbasis wir mit  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  bezeichnen.

- (i) Was ist der Rang eines Endomorphismus  $\vartheta^{-1}(\beta \otimes v): V \longrightarrow V$ , der von einem Elementartensor definiert wird?
- (ii) Finden Sie ein Element  $m \in V^* \otimes_{\mathbb{R}} V$ , sodass

$$\vartheta^{-1}(m)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was ist das minimale  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $m = \sum_{i=1}^n \beta_i \otimes v_i$ , mit  $\beta_i \in V^*$  und  $v_i \in V$  für alle  $1 \leq i \leq n$ ?

- (iii) Zeigen Sie, dass die Coevaluationsabbildung  $\text{coev}^l: \mathbb{R} \longrightarrow V \otimes V^*$  nicht von der Wahl einer Basis von  $V$  abhängt.

Seien  $(1 \ 2), (2 \ 3) \in S_3$ .

- (iv) Zeigen Sie, dass die zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} \rho_{(1 \ 2)}: V \otimes V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V \otimes V, & u \otimes v \otimes w &\longmapsto v \otimes u \otimes w, \\ \rho_{(2 \ 3)}: V \otimes V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V \otimes V, & u \otimes v \otimes w &\longmapsto u \otimes w \otimes v \end{aligned}$$

wohldefinierte Automorphismen sind.

- (v) Beweisen Sie, dass es eine eindeutige Darstellung

$$\rho: S_3 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V \otimes V \otimes V)$$

gibt, sodass  $\rho((1 \ 2)) = \rho_{(1 \ 2)}$  und  $\rho((2 \ 3)) = \rho_{(2 \ 3)}$ .

- (vi) Bestimmen Sie eine Basis  $\mathcal{C}$  der Unterdarstellung

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in V \otimes V \otimes V \mid \rho(\tau)m = m \text{ für alle } \tau \in S_3\}.$$

- (vii) Die Gruppe  $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$  wirkt ebenfalls via

$$\varrho: \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V \otimes V \otimes V), \quad \varrho(f)(u \otimes v \otimes w) = f(u) \otimes f(v) \otimes f(w).$$

Stimmt es, dass  $\varrho(f)m \in M$  für alle  $f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$  und  $m \in M$ ?

In erster Näherung ist eine Algebra ein Ring, der auch ein Vektorraum ist und dessen Multiplikation, mit der Vektorraumstruktur verträglich ist. Präzise gefasst, ergibt sich damit die folgende Definition.

DEFINITION 3.1. Eine *Algebra* ist ein  $\mathbb{k}$ -Vektorraum  $A$  zusammen mit einer Multiplikation, gegeben durch eine Abbildung  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(a, b) \mapsto a \cdot b$ , und einem Einselement  $1 \in A$ , sodass die folgenden Axiome zutreffen:

(i) Die Multiplikation ist *bilinear*:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \quad \text{für alle } a, b, c, d \in A$$

$$(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b) \quad \text{für alle } a, b \in A, \lambda \in \mathbb{k}.$$

(ii) Es gilt das *Assoziativitätsgesetz*:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{für alle } a, b, c \in A.$$

(iii) Die Multiplikation ist *unital*:

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \quad \text{für alle } a \in A.$$

Eines der wichtigsten Beispiele für  $\mathbb{k}$ -Algebren kennen wir bereits aus der linearen Algebra.

BEISPIEL 3.2. Die  $n \times n$ -Matrizen  $\text{Mat}_n(\mathbb{k})$  eines Körpers  $\mathbb{k}$  bilden eine  $\mathbb{k}$ -Algebra. Für  $\lambda \in \mathbb{k}$  und  $A, B, C, D \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  berechnen wir

$$(A + B) \cdot (C + D) \stackrel{\text{Distributiv-}}{=} A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

$$(\lambda A) \cdot B = ((\lambda_n) \cdot A) \cdot B \stackrel{\text{Assoziativ-}}{=} (\lambda_n) \cdot (A \cdot B) = \lambda(A \cdot B).$$

Um  $(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$  zu zeigen, benutzen wir  $(\lambda_n)A = A\lambda_n$  und erhalten

$$(\lambda A) \cdot B = ((\lambda_n) \cdot A) \cdot B = (A \cdot (\lambda_n)) \cdot B \stackrel{\text{Assoziativ-}}{=} A \cdot (\lambda_n \cdot B) = A \cdot (\lambda B).$$

Weiterhin ist Matrixmultiplikation assoziativ und unital mit  $1_n$  als Eins.

Das *Zentrum* eines Rings  $R$  ist

$$(3.10) \quad Z(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{r \in R \mid rs = sr \text{ für alle } s \in R\}.$$

LEMMA 3.3. *Ein Ring  $R$  ist genau dann eine  $\mathbb{k}$ -Algebra, wenn es einen Ringhomomorphismus  $\eta: \mathbb{k} \rightarrow Z(R)$  gibt. In diesem Fall ist die Skalarmultiplikation auf  $R$  gegeben durch*

$$(3.11) \quad \lambda \cdot r \stackrel{\text{def}}{=} \eta(\lambda)r \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{k} \text{ und } r \in R.$$

BEWEIS. Sei  $\eta: \mathbb{k} \rightarrow Z(R)$  ein Ringhomomorphismus. Wir zeigen zunächst, dass  $R$  ein  $\mathbb{k}$ -Vektorraum ist, mittels seiner Addition und der Skalarmultiplikation  $\lambda \cdot r \stackrel{\text{def}}{=} \eta(\lambda)r$  für alle  $\lambda \in \mathbb{k}$  und  $r \in R$ . Seien  $\lambda, \nu \in \mathbb{k}$  und  $r, s \in R$ . Es gilt

$$1_{\mathbb{k}} \cdot r = \eta(1_{\mathbb{k}})r = 1_R \cdot r = r,$$

$$\lambda \cdot (\nu \cdot r) = \eta(\lambda)(\eta(\nu)r) = \eta(\lambda\nu)r = (\lambda\nu) \cdot r,$$

$$(\lambda + \nu) \cdot r = \eta(\lambda + \nu)r = (\eta(\lambda) + \eta(\nu))r = \eta(\lambda)r + \eta(\nu)r = \lambda \cdot r + \nu \cdot r,$$

$$\lambda \cdot (r + s) = \eta(\lambda)(r + s) = \eta(\lambda)r + \eta(\lambda)s = \lambda \cdot r + \lambda \cdot s.$$

Also ist  $R$  ein  $\mathbb{k}$ -Vektorraum mittels der zuvor angegebenen Skalarmultiplikation. Weiterhin haben wir für alle  $\lambda \in \mathbb{k}$  und  $r, s \in R$  die Identitäten

$$(\lambda \cdot r)s = (\eta(\lambda)r)s = \eta(\lambda)(rs) = \lambda \cdot (rs),$$

$$r(\lambda \cdot s) = r(\eta(\lambda)s) = (r\eta(\lambda))s = (\eta(\lambda)r)s = \eta(\lambda)(rs) = \lambda \cdot (rs).$$

Zusammen mit dem Distributivgesetz von  $R$  folgt, die Multiplikation von  $R$  ist bilinear, assoziativ und unital. Demnach ist  $R$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra.

Sei umgekehrt  $R$  eine  $k$ -Algebra. Wir definieren die Abbildung

$$(3.12) \quad \eta: \mathbb{k} \longrightarrow R, \quad \eta(\lambda) = \lambda 1_R$$

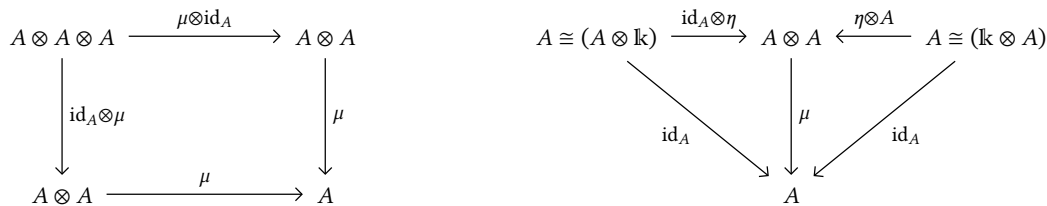
Diese ist offensichtlich ein Ringhomomorphismus und  $\eta(\lambda)r = (\lambda 1_R)r = r(\lambda 1_R)$  für alle  $r \in R$ . Somit liegt das Bild von  $\eta$  im Zentrum von  $R$ .  $\square$

Nachdem wir bereits die Eins einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $(A, \cdot, 1_A)$  mit einer linearen Abbildung  $\eta: \mathbb{k} \longrightarrow Z(A), \lambda \mapsto \lambda 1_A$  identifiziert haben, wollen wir auch die ihre bilineare Multiplikation "linearisieren".

**DEFINITION 3.4.** Eine  $\mathbb{k}$ -Algebra ist ein Tripel  $(A, \mu, \eta)$  bestehend aus einem Vektorraum  $A$  und zwei linearen Abbildungen  $\mu: A \otimes A \longrightarrow A$  und  $\eta: \mathbb{k} \longrightarrow A$ , die die *Multiplikation* und *Eins* der Algebra genannt werden und das *Assoziativitäts-* und *Unitalitätsgesetz* erfüllen:

$$(3.13) \quad \mu(\mu \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \mu), \quad \mu(\eta \otimes \text{id}) = \text{id}_A = \eta(\text{id}_A \otimes \eta).$$

Das Assoziativitäts- und Unitalitätsaxiom aus Gleichung (3.13) kann auch in Form von zwei kommutierenden Diagrammen angegeben werden.



Jedes Element  $x \in V \otimes W$  des Tensorprodukts zweier Vektorräume  $V, W$  ist eine Summe  $x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$  endlich vieler *elementarer Tensoren*. Möchte man eine lineare Abbildung  $f: V \otimes W \longrightarrow Z$  angeben, so ist sie wegen der Kompatibilität mit der Vektoraddition, durch ihre Werte auf elementaren Tensoren eindeutig bestimmt. Der Übersicht halber ist deshalb die Schreibweise

$$f: V \otimes W \longrightarrow Z \quad v \otimes w \mapsto f(v \otimes w)$$

üblich. Es folgt  $f(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^n f(v_i \otimes w_i)$ .

**ÜBUNG 3.2.** Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Strukturen um Algebren handelt. Versuchen Sie, Definitionen 3.1, 3.4 und Lemma 3.3 zu verwenden.

- (i) Die komplexen Zahlen sind eine  $\mathbb{R}$ -Algebra.
- (ii) Sei  $V$  ein  $\mathbb{k}$ -Vektorraum. Dann sind die Endomorphismen  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra mittels Verkettung als Multiplikation.
- (iii) Sind  $A$  und  $B$  zwei  $\mathbb{k}$ -Algebren, dann ist  $A \times B$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra mittels der Multiplikation

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2).$$

(iv) Sind  $A$  und  $B$  zwei  $\mathbb{k}$ -Algebren, dann ist  $A \otimes B$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra mittels der Multiplikation

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)$$

BEISPIEL 3.5. Sei  $G$  eine Gruppe und  $\mathbb{k}[G] = \text{Abb}(G, \mathbb{k})$  der von  $G$  erzeugte Vektorraum. Wir werden in Zukunft die alternative Schreibweise  $g \stackrel{\text{def}}{=} \partial_g \in \mathbb{k}[G]$  für die eindeutige Abbildung von  $G$  nach  $\mathbb{k}$  die an der Stelle  $g \in G$  den Wert 1 annimmt und ansonsten konstant 0 ist verwenden. Damit lassen sich die Elemente von  $\mathbb{k}[G]$  darstellen als Summen  $\sum_{g \in G} \lambda_g g$ , wobei  $\lambda_g \neq 0$  für nur endlich viele  $g \in G$ . Wir wollen die Gruppenoperation von  $G$  auf  $\mathbb{k}[G]$  "erweitern". Dazu definieren wir die Multiplikation durch ihre Werte auf der Basis und setzen

$$g \cdot h = gh \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

Aus der Assoziativitäts- und Unitalitätseigenschaft der Gruppenoperation folgt, dass auch die von uns definierte Multiplikation von  $\mathbb{k}[G]$  assoziativ und unital ist mit  $e \in \mathbb{k}[G]$  als Einselement. Man nennt die resultierende  $\mathbb{k}$ -Algebra die *Gruppenalgebra* von  $G$ . Das Produkt zweier beliebiger Elemente  $\sum_{g \in G} \lambda_g g \in \mathbb{k}[G]$  und  $\sum_{h \in G} \gamma_h h \in \mathbb{k}[G]$  ist

$$\left( \sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \cdot \left( \sum_{h \in G} \gamma_h h \right) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{h \in H} \lambda_{gh^{-1}} \gamma_h \right) g.$$

Wir wollen die Konstruktion an einem konkreten Beispiel nachvollziehen. Es sei  $G = \langle g \mid g^3 = e \rangle$  die zyklische Gruppe mit 3 Elementen und  $a = 2g + 3g^2$  sowie  $b = 5e + 7g$  seien zwei Elemente von  $\mathbb{C}[G]$ . Dann ist

$$a \cdot b = (2g + 3g^2) \cdot (5e + 7g) = (2 \cdot 5)g + (2 \cdot 7)g^2 + (3 \cdot 5)g^2 + (3 \cdot 7)e = 21e + 10g + 29g^2.$$

LEMMA 3.6. Sei  $I \subset R$  ein Linksideal des Rings  $R$  und  $\eta: \mathbb{k} \rightarrow Z(R)$  ein Ringhomomorphismus. Dann ist  $I$  ein Untervektorraum von  $R$  bezüglich der induzierten Vektorraumstruktur.

ÜBUNG 3.3. Beweisen Sie Lemma 3.6.

DEFINITION 3.7. Sei  $A$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra. Ein Untervektorraum  $I \subset A$  heißt *Linksideal* von  $A$ , wenn  $I$  ein Ideal bezüglich der Ringstruktur von  $A$  ist.

ÜBUNG 3.4. Wir betrachten die Gruppe  $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  und den Körper  $\mathbb{F}_3$  mit 3 Elementen. Es sei  $g = [1 + 3\mathbb{Z}] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

(i) Zeigen Sie, dass

$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}_3}(\mathbb{F}_3^3), \quad \rho(g^l)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^l \cdot v$$

eine Darstellung von  $G$  auf  $\mathbb{F}_3^3$  definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Algebra  $\text{End}_G(\mathbb{F}_3^3)$  lokal ist. Hinweis: Bestimmen Sie die darstellende Matrix einer  $G$ -äquivalenten Abbildung bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{F}_3^3$ .

Wie bei Ringen oder Gruppen gibt es "strukturerhaltende" Abbildungen zwischen Algebren.

DEFINITION 3.8. Seien  $A$  und  $B$  zwei  $\mathbb{k}$ -Algebren. Ein *Homomorphismus von Algebren* ist eine lineare Abbildung  $f: A \rightarrow B$ , sodass

$$f(a \cdot a') = f(a) \cdot f(a') \quad \text{für alle } a, a' \in A \quad \text{und} \quad f(1_A) = 1_B.$$

Falls es einen Algebrenhomomorphismus  $g: B \rightarrow A$  gibt, sodass  $g \circ f = \text{id}_A$  und  $f \circ g = \text{id}_B$ , spricht man von einem *Algebrenisomorphismus*.

Ähnlich wie bei Vektorräumen oder Darstellungen zeigt man, dass ein Homomorphismus von Algebren genau dann invertierbar ist, wenn er bijektiv ist.

LEMMA 3.9. *Der Kern eines Algebrenhomomorphismus  $f: A \rightarrow B$  ist ein Ideal.*

BEWEIS. Da  $f: A \rightarrow B$  insbesondere ein Ringhomomorphismus ist, ist sein Kern ein Ideal.  $\square$

ÜBUNG 3.5. *Seien  $G, H$  zwei Gruppen und  $\omega: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Gruppen.*

- (i) *Zeigen Sie, dass es einen Homomorphismus von Algebren  $\kappa: \mathbb{k}[G] \rightarrow \mathbb{k}[H]$  gibt, sodass  $\kappa[\partial_g] = \partial_{\omega[h]}$ .*
- (ii) *Beweisen Sie, dass der Kern  $\ker(\kappa) \subset \mathbb{k}[G]$  ein Ideal ist.*

ÜBUNG 3.6. *Die Gegenalgebra  $A^{\text{op}}$  einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $(A, \mu, \eta)$  ist definiert auf dem Vektorraum  $A$  zusammen mit der Multiplikation*

$$\mu^{\text{op}} \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ \sigma_{A,A}: A \otimes A \rightarrow A, \quad a \otimes b \mapsto \mu(b \otimes a)$$

und der Eins  $\eta: \mathbb{k} \rightarrow A$ .

- (i) *Zeigen Sie, dass  $A^{\text{op}}$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra ist.*
- (ii) *Sei  $A = \mathbb{k}[G]$  die Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe. Bestimmen Sie das Zentrum von  $\mathbb{k}[G]$  und  $\mathbb{k}[G]^{\text{op}}$ .*
- (iii) *Finden Sie einen Isomorphismus von  $\mathbb{k}$ -Algebren  $S: \mathbb{k}[G] \rightarrow \mathbb{k}[G]^{\text{op}}$ .*

Die Motivation Algebren, insbesondere Gruppenalgebren, zu betrachten ist, dass wir Darstellungen mittels ringtheoretischer Werkzeuge untersuchen können.

DEFINITION 3.10. Ein *Linksmodul* einer  $k$ -Algebra  $A$  ist ein Vektorraum  $M$  zusammen mit einem Homomorphismus von Algebren  $\theta: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(M)$ .

Im Folgenden werden wir der Einfachheit halber anstatt von einem ‘Linksmodul der Algebra  $A$ ’ von einem ‘ $A$ -Modul’ sprechen oder, falls sich die Algebra  $A$  aus dem Kontext ergibt, nur von einem ‘Modul’.

BEISPIEL 3.11. Sei  $G$  eine Gruppe. Dann ist jede Darstellung  $(V, \rho)$  ein Modul der Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$  via der Abbildung

$$\theta: \mathbb{k}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V), \quad \sum_{g \in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g \rho(g).$$

Umgekehrt definiert ein Modul  $(V, \theta)$  von  $\mathbb{k}[G]$  eine Darstellung von  $G$ . Die Gruppenwirkung ist  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V)$ ,  $\rho(g) = \theta(g)$ .

Wir wollen jetzt eine zweite Beschreibung von Moduln über Algebren angeben, die mehr an Gruppenwirkungen erinnert.

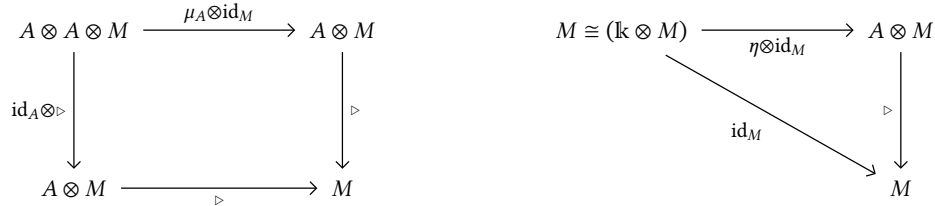
DEFINITION 3.12. Sei  $A$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra. Ein Linksmodul von  $A$  ist ein Vektorraum  $M$  zusammen mit einer *Wirkung* von  $A$  auf  $M$ , die gegeben ist durch eine lineare Abbildung

$$-\triangleright -: A \otimes M \longrightarrow M, \quad a \otimes m \longmapsto a \triangleright m,$$

sodass für alle  $a, b \in A$  und  $m \in M$  gilt

$$(3.14) \quad a \triangleright (b \triangleright m) = (a \cdot b) \triangleright m \quad \text{und} \quad 1_A \triangleright m = m.$$

Die Kompatibilitäten von Wirkungen mit Multiplikation und Eins können durch kommutierende Diagramme beschrieben werden:



Die Charakterisierung von Moduln mittels Wirkungen und Algebrenhomomorphismen sind äquivalent. Dieser Gleichheit liegt die sogenannte “Tensor-Hom-Adjunktion” zugrunde, der wir im Verlauf des Semesters noch weiter begegnen werden.

LEMMA 3.13. Es sei  $A$  eine Algebra und  $M$  ein Vektorraum. Dann sind die Abbildungen

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \{ \text{Algebra-Morphismen } \theta: A \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(M) \} &\longrightarrow \{ \text{Wirkungen von } A \text{ auf } M \} \\ \theta &\longmapsto (a \triangleright m \stackrel{\text{def}}{=} \vartheta(a)m) \\ (\vartheta(a)m \stackrel{\text{def}}{=} a \blacktriangleright m) &\longleftarrow (a \blacktriangleright m) \end{aligned}$$

zueinander invers.

BEWEIS. Es sei  $A$  eine Algebra und  $\theta: A \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(M)$  ein Morphismus von Algebren. Wir definieren die lineare Abbildung  $-\triangleright -: A \otimes M \longrightarrow M$ ,  $a \triangleright m = \theta(a)m$  und berechnen

$$\begin{aligned} a \triangleright (b \triangleright m) &= a \triangleright (\theta(b)m) = \theta(a)(\theta(b)m) = \theta(ab)m = ab \triangleright m, \\ 1_A \triangleright m &= \theta(1_A)m = m. \end{aligned}$$

Sei nun  $\blacktriangleright -: A \otimes M \longrightarrow M$  eine Wirkung von  $A$ . Wir setzen

$$\vartheta: A \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(M), \quad \vartheta(a)n = a \blacktriangleright n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \vartheta(ab)n &= ab \blacktriangleright n = a \blacktriangleright (b \blacktriangleright n) = \vartheta(a)(\vartheta(b)n), \\ \vartheta(1_A)n &= 1_A \blacktriangleright n. \end{aligned}$$

Damit überführen die Abbildungen aus Gleichung (3.15) Algebra-Homomorphismen in Wirkungen und umgekehrt. Weiterhin sind sie zueinander invers, was den Beweis vervollständigt.  $\square$

Wirkungen von Gruppenalgebren haben besonders einfache Formen.

BEMERKUNG 3.14. Sei  $G$  eine Gruppe und  $V$  ein  $\mathbb{k}[G]$ -Modul. Dann gelten für alle  $g, h \in G$ ,  $m, n \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{k}$  die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned} (3.16a) \quad &g \triangleright (m + n) = g \triangleright m + g \triangleright n \\ (3.16b) \quad &g \triangleright (\lambda m) = \lambda(g \triangleright m) \\ (3.16c) \quad &g \triangleright (h \triangleright m) = (gh) \triangleright m \\ (3.16d) \quad &e \triangleright m = m \end{aligned}$$

Da  $G$  mit einer Basis der Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$  identifiziert werden kann folgt, dass jede Abbildung  $\rightarrow -: G \times V \rightarrow V$ , die den Axiomen (3.16a) bis (3.16d) genügt, eine (eindeutige) Wirkung von  $\mathbb{k}[G]$  auf  $V$  definiert.

BEISPIEL 3.15. Sei  $G$  eine Gruppe und  $M$  mittels der Wirkung  $\triangleright: G \times M \rightarrow M$  eine  $G$ -Menge. Wie bei der Gruppenalgebra identifizieren wir  $M$  mit der Standardbasis von  $\mathbb{k}[M]$ . Dann ist  $\mathbb{k}[M]$  ein  $\mathbb{k}[G]$ -Linksmodul via

$$-\triangleright -: \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[M] \rightarrow \mathbb{k}[M], \quad g \triangleright m = g \triangleright m.$$

Ist  $M = G$  und die Wirkung durch Linksmultiplikation gegeben, so erhalten wir die reguläre Darstellung. Sie wird auch der *reguläre Modul* der Algebra  $\mathbb{k}[G]$  genannt.

Wir werden die Begriffe “Modul” und “Darstellung” synonym verwenden und jeweils die Perspektive wählen, die für den jeweiligen Kontext am besten geeignet ist. Die Tabelle in Abschnitt E vergleicht die verschiedenen Definitionen und fasst wesentliche Konstruktionen noch einmal knapp zusammen.

ÜBUNG 3.7. Es sei  $G$  eine Gruppe und  $(V, \triangleright_V), (W, \triangleright_W)$  zwei Moduln.

(i) Zeigen Sie, dass  $V \otimes W$  ein  $\mathbb{k}[G]$ -Modul ist mittels der Wirkung

$$\rightarrow -: \mathbb{k}[G] \otimes (V \otimes W) \rightarrow V \otimes W, \quad g \triangleright (v \otimes w) = (g \triangleright_V v) \otimes (g \triangleright_W w).$$

(ii) Bestimmen Sie den Algebrenhomomorphismus  $\vartheta: \mathbb{k}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V \otimes W)$ , der sich aus der Wirkung aus Teilaufgabe (i) ergibt.

(iii) Beweisen Sie, dass der Dualraum  $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  eine Darstellung von  $G$  ist mittels der Wirkung

$$\rho_{V^*}: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V^*), \quad \rho(g)(\chi) = \chi \circ \rho(g^{-1})$$

(iv) Geben Sie die Wirkung aus Teilaufgabe (iii) in Form einer Abbildung  $G \times V^* \rightarrow V^*$  an.

### Übungsaufgaben aus Woche 3.

ÜBUNG 3.1. Sei  $V$  ein dreidimensionaler reeller Vektorraum dessen Standardbasis wir mit  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  bezeichnen.

- (i) Was ist der Rang eines Endomorphismus  $\vartheta^{-1}(\beta \otimes v): V \rightarrow V$ , der von einem Elementartensor definiert wird?  
 (ii) Finden Sie ein Element  $m \in V^* \otimes_{\mathbb{R}} V$ , sodass

$$\vartheta^{-1}(m)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was ist das minimale  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $m = \sum_{i=1}^n \beta_i \otimes v_i$ , mit  $\beta_i \in V^*$  und  $v_i \in V$  für alle  $1 \leq i \leq n$ ?

- (iii) Zeigen Sie, dass die Coevaluationsabbildung  $\text{coev}^l: \mathbb{R} \rightarrow V \otimes V^*$  nicht von der Wahl einer Basis von  $V$  abhängt.

Seien  $(1\ 2), (2\ 3) \in S_3$ .

- (iv) Zeigen Sie, dass die zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} \rho_{(1\ 2)}: V \otimes V \otimes V &\rightarrow V \otimes V \otimes V, & u \otimes v \otimes w &\mapsto v \otimes u \otimes w, \\ \rho_{(2\ 3)}: V \otimes V \otimes V &\rightarrow V \otimes V \otimes V, & u \otimes v \otimes w &\mapsto u \otimes w \otimes v \end{aligned}$$

wohldefinierte Automorphismen sind.

- (v) Beweisen Sie, dass es eine eindeutige Darstellung

$$\rho: S_3 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V \otimes V \otimes V)$$

gibt, sodass  $\rho((1\ 2)) = \rho_{(1\ 2)}$  und  $\rho((2\ 3)) = \rho_{(2\ 3)}$ .

- (vi) Bestimmen Sie eine Basis  $\mathcal{C}$  der Unterdarstellung

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in V \otimes V \otimes V \mid \rho(\tau)m = m \text{ für alle } \tau \in S_3\}.$$

- (vii) Die Gruppe  $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$  wirkt ebenfalls via

$$\varrho: \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V \otimes V \otimes V), \quad \varrho(f)(u \otimes v \otimes w) = f(u) \otimes f(v) \otimes f(w).$$

Stimmt es, dass  $\varrho(f)m \in M$  für alle  $f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$  und  $m \in M$ ?

ÜBUNG 3.2. Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Strukturen um Algebren handelt. Versuchen Sie, Definitionen 3.1, 3.4 und Lemma 3.3 zu verwenden.

- (i) Die komplexen Zahlen sind eine  $\mathbb{R}$ -Algebra.  
 (ii) Sei  $V$  ein  $\mathbb{k}$ -Vektorraum. Dann sind die Endomorphismen  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra mittels Verkettung als Multiplikation.  
 (iii) Sind  $A$  und  $B$  zwei  $\mathbb{k}$ -Algebren, dann ist  $A \times B$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra mittels der Multiplikation

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2).$$

- (iv) Sind  $A$  und  $B$  zwei  $\mathbb{k}$ -Algebren, dann ist  $A \otimes B$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra mittels der Multiplikation

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)$$

ÜBUNG 3.3. Beweisen Sie Lemma 3.6.

ÜBUNG 3.4. Wir betrachten die Gruppe  $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  und den Körper  $\mathbb{F}_3$  mit 3 Elementen. Es sei  $g = [1 + 3\mathbb{Z}] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

(i) Zeigen Sie, dass

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}_3}(\mathbb{F}_3^3), \quad \rho(g^l)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^l \cdot v$$

eine Darstellung von  $G$  auf  $\mathbb{F}_3^3$  definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Algebra  $\text{End}_G(\mathbb{F}_3^3)$  lokal ist. Hinweis: Bestimmen Sie die darstellende Matrix einer  $G$ -äquivalenten Abbildung bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{F}_3^3$ .

ÜBUNG 3.5. Seien  $G, H$  zwei Gruppen und  $\omega: G \longrightarrow H$  ein Homomorphismus von Gruppen.

- (i) Zeigen Sie, dass es einen Homomorphismus von Algebren  $\kappa: \mathbb{k}[G] \longrightarrow \mathbb{k}[H]$  gibt, sodass  $\kappa[\partial_g] = \partial_{\omega[h]}$ .
- (ii) Beweisen Sie, dass der Kern  $\ker(\kappa) \subset \mathbb{k}[G]$  ein Ideal ist.

ÜBUNG 3.6. Die Gegenalgebra  $A^{\text{op}}$  einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $(A, \mu, \eta)$  ist definiert auf dem Vektorraum  $A$  zusammen mit der Multiplikation

$$\mu^{\text{op}} \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ \sigma_{A,A}: A \otimes A \longrightarrow A, \quad a \otimes b \longmapsto \mu(b \otimes a)$$

und der Eins  $\eta: \mathbb{k} \longrightarrow A$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $A^{\text{op}}$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra ist.
- (ii) Sei  $A = \mathbb{k}[G]$  die Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe. Bestimmen Sie das Zentrum von  $\mathbb{k}[G]$  und  $\mathbb{k}[G]^{\text{op}}$ .
- (iii) Finden Sie einen Isomorphismus von  $\mathbb{k}$ -Algebren  $S: \mathbb{k}[G] \longrightarrow \mathbb{k}[G]^{\text{op}}$ .

ÜBUNG 3.7. Es sei  $G$  eine Gruppe und  $(V, \triangleright_V), (W, \triangleright_W)$  zwei Moduln.

- (i) Zeigen Sie, dass  $V \otimes W$  ein  $\mathbb{k}[G]$ -Modul ist mittels der Wirkung
- $$\rightarrow -: \mathbb{k}[G] \otimes (V \otimes W) \longrightarrow V \otimes W, \quad g \triangleright (v \otimes w) = (g \triangleright_V v) \otimes (g \triangleright_W w).$$
- (ii) Bestimmen Sie den Algebrenhomomorphismus  $\vartheta: \mathbb{k}[G] \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V \otimes W)$ , der sich aus der Wirkung aus Teilaufgabe (i) ergibt.
- (iii) Beweisen Sie, dass der Dualraum  $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  eine Darstellung von  $G$  ist mittels der Wirkung

$$\rho_{V^*}: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V^*), \quad \rho(g)(\chi) = \chi \circ \rho(g^{-1})$$

- (iv) Geben Sie die Wirkung aus Teilaufgabe (iii) in Form einer Abbildung  $G \times V^* \longrightarrow V^*$  an.

#### 4. Woche 04: Direkte Summanden und idempotente Elemente

Das Schöne ist ebenso nützlich wie das Nützliche. Mehr noch vielleicht.

---

Victor Hugo – Die Elenden

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) den regulären Modul
- (ii) Homomorphismen von Moduln
- (iii) Untermoduln und Quotientenmoduln
- (iv) direkte Summanden und ihre Charakterisierung durch idempotente Elemente

Bevor wir zeigen, dass sich jede Darstellung einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 in eine direkte Summe einfacher Unterdarstellungen zerlegen lässt, werden wir Kriterien für Halbeinfachheit entwickeln und diese mit idempotenten Elementen in (Gruppen-)Algebren in Verbindung bringen.

*Hinweis:* Wegen des Feiertags findet am Donnerstag keine Vorlesung statt.

Das Konzept der regulären Darstellung einer Gruppe lässt sich auf allgemeine Algebren erweitern.

**DEFINITION 4.1.** Der *reguläre Modul* einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $(A, \mu, \eta)$  ist der Vektorraum  $A$  zusammen mit der von der Multiplikation definierten Wirkung  $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ .

Das Analogon zu Unterdarstellungen sind Untermoduln. Für einen gegebenen Linksmodul  $(M, \triangleright)$  einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $A$  ist ein *Untermodul* ein Untervektorraum  $U \subset M$ , sodass

$$(4.1) \quad a \triangleright u \in U \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } u \in U.$$

Gibt es einen weiteren Untermodul  $N \subset M$ , sodass  $U \cap N = \{0\}$  und  $U + N = M$ , so nennt man  $M$  die (*innere*) *direkte Summe* von  $U$  und  $N$  und schreibt  $M = U \oplus N$ . Man bezeichnet  $U$  und  $N$  als *direkte Summanden* und sagt  $N$  und  $U$  sind *Komplemente* von  $U$  beziehungsweise  $N$ .

**BEISPIEL 4.2.** Sei  $A$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra. Ein Untervektorraum  $I \subset A$  der regulären Darstellung ist genau dann ein Untermodul, wenn  $a \cdot i \in I$  für alle  $a \in A$  und  $i \in I$ . Das bedeutet, die Untermoduln des regulären Moduls von  $A$  stehen in Bijektion mit Linksidealen der Algebra  $A$ .

Wie Untervektorräume können wir auch Untermoduln durch eine Teilmenge von Erzeugern angeben; lineare Unabhängigkeit oder Basen sind hingegen keine Konzepte die für beliebige Moduln verwendet werden können.

**DEFINITION 4.3.** Es sei  $(M, \triangleright)$  ein  $A$ -Modul und  $T \subset M$  eine Teilmenge. Man nennt

$$(4.2) \quad \text{span}_A(T) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{T \subset N \subset M, \\ N \text{ Untermodul}}} N = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \triangleright t_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in A, t_i \in T \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \right\}$$

den von  $T$  erzeugten *Untermodul* und  $T$  ein *Erzeugendensystem*.

Jede Vektorraumbasis eines  $A$ -Moduls  $M$  ist ein Erzeugendensystem von  $M$ . Im Allgemeinen lassen sich aber weniger Erzeuger finden. Zum Beispiel erzeugt  $\{1_A\} \subset A$  den regulären Modul der  $\mathbb{k}$ -Algebra  $A$ .

ÜBUNG 4.1. Es sei  $(M, \triangleright)$  ein  $A$ -Modul und  $T \subset M$  eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\bigcap_{\substack{T \subset N \subset M, \\ N \text{ Untermodul}}} N = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \triangleright t_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in A, t_i \in T \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \right\}$$

erfüllt ist und begründen Sie, dass  $\text{span}_A(T)$  ein Untermodul von  $M$  ist.

BEISPIEL 4.4. Betrachten wir die Gruppenalgebra  $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$  der zyklischen Gruppe mit zwei Elementen und schreiben  $g = [1] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Der reguläre Modul hat einen eindimensionalen Untermodul  $M \subset \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ , der vom Element  $1 + g$  erzeugt wird. Die Menge  $\{1 + g\}$  ist allerdings nicht linear unabhängig, da

$$(1 + g) \triangleright (1 + g) = 1 + 2g + g^2 = 2 + 2g = 0.$$

Insbesondere kann  $M$  keine Basis als Modul haben.

Angenommen  $(M, \triangleright)$  sei ein Linksmodul einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $A$  und  $N \subset M$  ein Untermodul. Wir definieren die lineare Abbildung

$$\rightarrow -: A \otimes M/N \longrightarrow M/N, \quad a \blacktriangleright [m] = [a \triangleright m].$$

Für alle  $a, b \in A, m \in M$  und  $n \in N$  gilt

$$\begin{aligned} a \blacktriangleright [n] &= [a \triangleright n] = [0], \\ a \blacktriangleright (b \blacktriangleright [m]) &= a \blacktriangleright [b \triangleright m] = [a \triangleright (b \triangleright m)] = [(ab) \triangleright m] = ab \blacktriangleright [m], \\ 1_A \blacktriangleright [m] &= [1_A \triangleright m] = [m]. \end{aligned}$$

Demnach ist der Quotientenvektorraum  $M/N$  mittels  $\rightarrow -: A \otimes M/N \longrightarrow M/N$  selbst wieder ein Modul.

DEFINITION 4.5. Sei  $A$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra  $(M, \triangleright)$  ein Modul und  $N$  ein Untermodul. Der Quotientenmodul  $(M/N, \blacktriangleright)$  hat  $M/N$  als den zugrunde liegenden Vektorraum und die Wirkung

$$(4.3) \quad \blacktriangleright: A \otimes M/N \longrightarrow M/N, \quad a \blacktriangleright [m] = [a \triangleright m].$$

BEISPIEL 4.6. Wir fixieren eine Basis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  von  $\mathbb{C}^3$ . Die Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[S_3]$  wirkt auf  $\mathbb{C}^3$  mittels

$$\sigma \triangleright \mathbb{C}[S_3] \otimes \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad \sigma \triangleright b_i = b_{\sigma(i)}, \quad \text{für alle } \sigma \in S_3 \text{ und } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Wir schreiben  $x = b_1 - b_2, y = b_2 - b_3$  und  $z = b_1, b_2, b_3$ . Das Tripel  $(x, y, z)$  definiert eine weitere Basis von  $\mathbb{C}^3$ . In Beispiel 2.7 haben wir gesehen, dass der Untervektorraum  $U = \text{span}_{\mathbb{k}}(z)$  einen Untermodul definiert. Der Quotient  $\mathbb{C}^3/U$  hat eine Basis  $([x], [y])$  die durch die Äquivalenzklassen von  $x$  und  $y$  bestimmt ist. Sei  $\sigma = (1\ 2) \in S_3$ . Dann ist

$$\sigma \blacktriangleright [x] = [\sigma \triangleright x] = [\sigma \triangleright (b_1 - b_2)] = [b_2 - b_1] = -[x].$$

ÜBUNG 4.2. Betrachten Sie die Algebren  $A = \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$  und  $B = \mathbb{C}[S_3]$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $A$  lokal (als Ring) ist.
- (ii) Bestimmen Sie einen echten Untermodul  $I \subset A_{\text{reg}}$ .
- (iii) Beweisen Sie, dass  $A_{\text{reg}}/I \cong I$ .

Es sei  $t = (1\ 2\ 3) \in S_3$ . Wir definieren  $p_{\text{std}} = \frac{1}{3}(2e - t - t^2)$ .

- (iv) Zeigen Sie, dass  $p_{\text{std}} \in \mathbb{C}[S_3]$  zentral ist. Das bedeutet  $p \cdot x = x \cdot p$  für alle  $x \in \mathbb{C}[S_3]$ .

(v) Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums

$$P = p_{std} \cdot \mathbb{C}[S_3] \stackrel{\text{def}}{=} \{p_{std} \cdot s \mid s \in \mathbb{C}[S_3]\}.$$

(vi) Begründen Sie, dass  $P$  ein Untermodul von  $\mathbb{C}[S_3]_{reg}$  ist.

(vii) Finden Sie einen weiteren Untermodul  $M \subset \mathbb{C}[S_3]_{reg}$ , sodass  $M \oplus P = \mathbb{C}[S_3]_{reg}$ .

(viii) Sind  $\mathbb{C}[S_3]_{reg}/P$  und  $M$  isomorph?

Um Moduln miteinander zu vergleichen und ihre Zerlegbarkeit zu untersuchen brauchen wir das Konzept eines Homomorphismus. Dies ist strikt analog zu Definition 2.1.

DEFINITION 4.7. Sei  $A$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra und  $(M, \triangleright_M)$ ,  $(N, \triangleright_N)$  zwei Moduln. Man nennt eine lineare Abbildung  $f: M \rightarrow N$   $A$ -linear oder einen *Homomorphismus von Moduln*, wenn

$$(4.4) \quad f(a \triangleright_M m) = a \triangleright_N f(m), \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } m \in M.$$

Falls es einen Homomorphismus  $g: (N, \triangleright_N) \rightarrow (M, \triangleright_M)$  gibt, sodass  $g \circ f = \text{id}_M$  und  $f \circ g = \text{id}_N$ , bezeichnet man  $f$  als einen *Isomorphismus*.

Ist  $(M, \triangleright_M) = (N, \triangleright_N)$ , so spricht man von einem *Endomorphismus*, oder, falls  $f$  invertierbar ist, von einem *Automorphismus*.

LEMMA 4.8. Die Endomorphismen  $\text{End}_A(M)$  eines Linksmoduls  $M$  einer  $\mathbb{k}$ -Algebra bilden eine Algebra mit Verkettung als Multiplikation. Insbesondere gilt für den regulären Modul, dass  $\text{End}_A(A) \cong A^{\text{op}}$ .

ÜBUNG 4.3. Beweisen Sie Lemma 4.8.

ÜBUNG 4.4. Es sei  $\mathbb{k}[G]$  eine Gruppenalgebra,  $\mathbb{k}_{triv}$  der triviale Modul und  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{k}[G]$ -Linksmodul.

(i) Zeigen Sie, dass  $\text{ev}_V: V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{k}_{triv}$ ,  $f \otimes v \mapsto f(v)$  ein Homomorphismus von Moduln ist.

(ii) Es sei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$ . Wir schreiben  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  für die duale Basis. Das bedeutet  $\beta_i \in V^*$  für alle  $1 \leq i \leq n$  und  $\beta_i(b_j) = \delta_{i=j}$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\text{coev}_V: \mathbb{k} \rightarrow V \otimes V^*$ ,  $\lambda \mapsto \sum_{i=1}^n b_i \otimes \beta_i$   $\mathbb{k}[G]$ -linear ist.

(iii) Die  $\mathbb{k}$ -linearen Endomorphismen von  $V$  sind ein  $\mathbb{k}[G]$ -Modul mittels

$$g \triangleright f = g \triangleright f(g^{-1} \triangleright -)$$

für alle  $f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  und  $g \in G$ . Zeigen Sie, dass  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V) \cong V^* \otimes V$ .

BEISPIEL 4.9. Sei  $M$  ein  $A$ -Modul und  $N \subset M$  ein Untermodul. Die Abbildungen

$$(4.5) \quad \iota_N: N \rightarrow M, \quad n \mapsto n, \quad \pi_N: M \rightarrow M/N, \quad m \mapsto [m],$$

sind  $A$ -linear. Man nennt  $\iota_N$  die *kanonische Inklusion* von  $N$  und  $\pi_N$  die *kanonischen Projektion* auf  $M/N$ .

Angenommen  $N$  ist ein direkter Summand, so gibt es ein Komplement  $U \subset M$ . Insbesondere lässt sich jedes  $m \in M$  auf eindeutige Weise als  $n + u = m$  schreiben. Es folgt, die Abbildung

$$p: M \rightarrow N, \quad u + n \mapsto n \quad \text{für alle } u \in U, n \in N$$

ist linear. Weiterhin gilt  $p(a \triangleright (u + n)) = p(a \triangleright u + a \triangleright n) = a \triangleright n = a \triangleright p(u + n)$  für alle  $a \in A$ ,  $u \in U$  und  $n \in N$ . Also ist  $p: M \rightarrow N$  ein Homomorphismus von Moduln.

Für alle  $n \in N$  gilt  $p \circ \iota_N = \text{id}_N$  und damit folgt für  $\phi_N \stackrel{\text{def}}{=} \iota_N \circ p$  die Identität

$$\phi_N^2 = \iota_N \circ p \circ \iota_N \circ p = \iota_N \circ p = \phi_N.$$

DEFINITION 4.10. Ein Element  $p \in A$  einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $A$  heißt *idempotent*, falls  $p^2 = p$ .

LEMMA 4.11. Es sei  $A$  eine Algebra und  $N \subset M$  ein Untermodul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $N$  ist ein direkter Summand von  $M$ .
- (ii) Es gibt einen idempotenten Endomorphismus von Moduln  $\phi \in \text{End}_A(M)$ , sodass  $\text{im } \phi = N$ .
- (iii) Es gibt einen Homomorphismus  $p_N: M \rightarrow N$ , sodass  $p_N \circ \iota_N = \text{id}_N$ .
- (iv) Es existiert eine  $A$ -lineare Abbildung  $j_N: M/N \rightarrow M$ , sodass  $\pi_N \circ j_N = \text{id}_{M/N}$ .

BEWEIS. Die Implikation (i)  $\implies$  (ii) folgt aus Beispiel 4.9.

Um (ii)  $\implies$  (iii) zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe eine  $A$ -lineare Abbildung  $\phi: M \rightarrow M$ , sodass  $\phi^2 = \phi$  und  $\text{im } \phi = N$ . Wir definieren  $p_N \stackrel{\text{def}}{=} \phi|_N: M \rightarrow N$  als die Einschränkung von  $\phi$  auf ihr Bild. Sei  $n \in N$ . Dann gibt es ein  $m \in M$  mit  $\phi(m) = n$  und somit

$$p_N \iota_N(n) = \phi(n) = \phi(\phi(m)) = \phi(m) = n.$$

Wir beweisen (iii)  $\implies$  (iv): Sei  $p_N: M \rightarrow N$ , ein Homomorphismus von Moduln, sodass  $p_N \iota_N = \text{id}_N$ . Wir setzen

$$j_N: M/N \rightarrow M, \quad j_N([m]) = m - \iota_N p_N(m).$$

Für alle  $n \in N$  ist

$$j_N[n] = n - n = 0.$$

Also ist  $j_N: M/N \rightarrow M$  eine wohldefinierte lineare Abbildung. Weiterhin gilt für alle  $a \in A$  und  $m$  in  $M$ , dass

$$j_N(a \triangleright [m]) = j_N([a \triangleright m]) = a \triangleright m - \iota_N p_N(a \triangleright m) = a \triangleright (m - \iota_N p_N(m)) = a \triangleright j_N([m]).$$

Schließlich berechnen wir  $[j_N([m])] = [m - p_N(m)] = [m]$  für alle  $m \in M$ . Also ist  $\pi_N j_N = \text{id}_{M/N}$

Es verbleibt (iv)  $\implies$  (i) zu beweisen. Die Abbildung  $j_N: M/N \rightarrow M$  erfülle die Bedingungen aus (iv). Wir setzen  $U = \text{im } j_N$ . Angenommen  $x \in N \cap U$ . Dann gibt es ein  $[m] \in M/N$ , sodass  $x = j_N([m])$ . Da aber  $[m] = [j([m])] = [x] = 0$ , ist auch  $x = 0$ . Gegeben  $m \in M$ , setzen wir  $n = m - j_N([m]) \in N$  und  $u = j_N([m]) \in U$  und berechnen  $m = m - j_M([m]) + j_M([m]) = n + u$ . Es folgt (iv)  $\implies$  (i).  $\square$

ÜBUNG 4.5. Sei  $A$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra.

- (i) Zeigen Sie für jeden direkten Summanden  $I \subset A$  gibt es ein idempotentes Element  $p \in A$ , sodass  $I = Ap$ .
- (ii) Seien  $p, q \in A$  idempotente Elemente. Beweisen Sie, dass  $\text{Hom}_A(Ap, Aq) \cong pAq$ .

### Übungsaufgaben aus Woche 4.

ÜBUNG 4.1. Es sei  $(M, \triangleright)$  ein  $A$ -Modul und  $T \subset M$  eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\bigcap_{\substack{T \subset N \subset M, \\ N \text{ Untermodul}}} N = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \triangleright t_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in A, t_i \in T \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \right\}$$

erfüllt ist und begründen Sie, dass  $\text{span}_A(T)$  ein Untermodul von  $M$  ist.

ÜBUNG 4.2. Betrachten Sie die Algebren  $A = \mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$  und  $B = \mathbb{C}[S_3]$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $A$  lokal (als Ring) ist.
- (ii) Bestimmen Sie einen echten Untermodul  $I \subset A_{\text{reg}}$ .
- (iii) Beweisen Sie, dass  $A_{\text{reg}}/I \cong I$ .

Es sei  $t = (1\ 2\ 3) \in S_3$ . Wir definieren  $p_{\text{std}} = \frac{1}{3}(2e - t - t^2)$ .

- (iv) Zeigen Sie, dass  $p_{\text{std}} \in \mathbb{C}[S_3]$  zentral ist. Das bedeutet  $p \cdot x = x \cdot p$  für alle  $x \in \mathbb{C}[S_3]$ .
- (v) Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums

$$P = p_{\text{std}} \cdot \mathbb{C}[S_3] \stackrel{\text{def}}{=} \{p_{\text{std}} \cdot s \mid s \in \mathbb{C}[S_3]\}.$$

- (vi) Begründen Sie, dass  $P$  ein Untermodul von  $\mathbb{C}[S_3]_{\text{reg}}$  ist.
- (vii) Finden Sie einen weiteren Untermodul  $M \subset \mathbb{C}[S_3]_{\text{reg}}$ , sodass  $M \oplus P = \mathbb{C}[S_3]_{\text{reg}}$ .
- (viii) Sind  $\mathbb{C}[S_3]_{\text{reg}}/P$  und  $M$  isomorph?

ÜBUNG 4.3. Beweisen Sie Lemma 4.8.

ÜBUNG 4.4. Es sei  $\mathbb{k}[G]$  eine Gruppenalgebra,  $\mathbb{k}_{\text{triv}}$  der triviale Modul und  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{k}[G]$ -Linksmodul.

- (i) Zeigen Sie, dass  $\text{ev}_V: V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{k}_{\text{triv}}, f \otimes v \mapsto f(v)$  ein Homomorphismus von Moduln ist.
- (ii) Es sei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$ . Wir schreiben  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  für die duale Basis. Das bedeutet  $\beta_i \in V^*$  für alle  $1 \leq i \leq n$  und  $\beta_i(b_j) = \delta_{i=j}$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\text{coev}_V: \mathbb{k} \rightarrow V \otimes V^*, \lambda \mapsto \sum_{i=1}^n b_i \otimes \beta_i$   $\mathbb{k}[G]$ -linear ist.
- (iii) Die  $\mathbb{k}$ -linearen Endomorphismen von  $V$  sind ein  $\mathbb{k}[G]$ -Modul mittels

$$g \triangleright f = g \triangleright f(g^{-1} \triangleright -)$$

für alle  $f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  und  $g \in G$ . Zeigen Sie, dass  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V) \cong V^* \otimes V$ .

ÜBUNG 4.5. Sei  $A$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra.

- (i) Zeigen Sie für jeden direkten Summanden  $I \subset A$  gibt es ein idempotentes Element  $p \in A$ , sodass  $I = Ap$ .
- (ii) Seien  $p, q \in A$  idempotente Elemente. Beweisen Sie, dass  $\text{Hom}_A(Ap, Aq) \cong pAq$ .

## 5. Woche 05: Der Satz von Maschke und Charaktere

It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience.

Albert Einstein – Oxford, 10 June 1933

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) halbeinfache Moduln und halbeinfache Algebren
- (ii) Der Satz von Artin–Wedderburn als eine Charakterisierung von Halbeinfachheit
- (iii) Der Satz von Maschke
- (iv) Der Satz von Krull–Schmidt
- (v) Charaktere
- (vi) Zentrale idempotente Elemente der Gruppenalgebra

Betrachten wir die Gruppe  $G = \langle g \mid g^2 = e \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ihr regulärer Modul zerfällt in die direkte Summe der eindimensionalen Moduln

$$M_1 = \text{span}_{\mathbb{C}}(1 + g) \quad \text{und} \quad M_2 = \text{span}_{\mathbb{C}}(1 - g).$$

Die Wirkung ist  $g \cdot m = m$  für alle  $m \in M_1$  und  $g \cdot n = -n$  für alle  $n \in M_2$ . Nach Lemma 4.11 gibt es zu  $M_1$  und  $M_2$  gehörende  $\mathbb{C}[G]$ -lineare Abbildungen  $\phi_{M_1}, \phi_{M_2}: \mathbb{C}[G]_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{C}[G]_{\text{reg}}$ , sodass  $\phi_{M_1}^2 = \phi_{M_1}$  und  $\text{im } \phi_{M_1} = M_1$  sowie  $\phi_{M_2}^2 = \phi_{M_2}$  und  $\text{im } \phi_{M_2} = M_2$ . Exemplarisch für das Vorgehen in dieser Woche wollen wir  $\phi_{M_1}$  bestimmen. Wir definieren die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$\psi: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G], \quad 1 \mapsto 0, \quad g \mapsto 1 + g$$

Es gilt  $\psi^2(1) = 0 = \psi(1)$  und  $\psi^2(g) = \psi(1 + g) = 1 + g = \psi(g)$ . Folglich haben wir mit  $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$  einen Projektor auf  $M_1$ , der allerdings kein Homomorphismus von Moduln ist, da  $\psi(g) = 1 + g \neq 0 = g\psi(1)$ . In Übungsaufgabe 2.3 wurde gezeigt, dass wir jede lineare Abbildung zwischen Moduln auf einen Homomorphismus projizieren können, indem wir mit  $\frac{1}{2}(1 + g)$  wirken. In unserem Beispiel ergibt das die Abbildung

$$\phi_{M_1} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\text{triv}}(\psi): \mathbb{C}[G]_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{C}[G]_{\text{reg}}, \quad \phi_{M_1}(x) = \frac{1}{2}(\psi(x) + g\psi(gx)).$$

Wir berechnen

$$\phi_{M_1}(1) = \frac{1}{2}(\psi(1) + g\psi(g)) = \frac{1}{2}(1 + g), \quad \phi_{M_1}(g) = \frac{1}{2}(\psi(g) + g\psi(1)) = \frac{1}{2}(1 + g).$$

Damit ist  $\phi_{M_1}(1 + g) = 1 + g$  sowie  $\phi_{M_1}(1 - g) = 0$  und  $\phi_{M_1}: \mathbb{C}[G]_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{C}[G]_{\text{reg}}$  der gesuchte Projektor.

Das Ziel dieser Woche ist es, grob gesagt, zu zeigen, dass über den komplexen Zahlen der reguläre Modul der Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe in eine direkte Summe aus Moduln zerfällt die selber keine echten Untermoduln mehr haben und eine Formel für Projektoren auf diese Summanden zu finden.

**DEFINITION 5.1.** Ein Linksmodul  $M$  einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $A$  heißt *einfach*, falls  $M \neq 0$  und die einzigen Untermoduln  $\{0\} \subset M$  und  $M \subset M$  sind.

Ist  $M$  eine direkte Summe einfacher Moduln spricht man von einem *halbeinfachen* Modul.

Man nennt die Algebra  $A$  *halbeinfach*, falls jeder  $A$ -Modul halbeinfach ist.

Das nächste Theorem zeigt, dass die Halbeinfachheit einer Algebra im Wesentlichen von ihrem regulären Modul bestimmt ist.

**THEOREM 5.2.** Für jede  $k$ -Algebra  $A$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) Jeder  $A$ -Modul ist halbeinfach.
- (ii) Der reguläre Modul von  $A$  ist halbeinfach.
- (iii) Jeder Untermodul  $N \subset M$  ist ein direkter Summand.

**BEWEIS.** Da (ii) ein Spezialfall von (i) ist, folgt (i)  $\implies$  (ii) sofort.

Um (ii)  $\implies$  (iii) zu zeigen nehmen wir an  $A = \bigoplus_{j \in J} I_j$  sei halbeinfach mit einfachen Untermoduln  $(I_j)_{j \in J}$ . Es gibt für jedes  $j \in J$  ein eindeutiges Element  $i_j \in I_j$ , sodass  $i_{j'} = 0$  für alle bis auf endlich viele  $j' \in J$  und  $\sum_{j \in J} i_j = 1_A$ . Sei  $j' \in J$  so, dass  $i_{j'} = 0$ . Es ist  $I_{j'} = I_{j'} 1 = \sum_{j \in J} I_{j'} i_j \in \bigoplus_{j \in J, j \neq j'} I_j$  im Widerspruch zu  $A = \bigoplus_{j \in J} I_j$ . Damit folgt  $J$  ist endlich  $i_j \neq 0$  für alle  $j \in J$ . Sei nun  $M$  ein Modul und  $N \subset M$  ein Untermodul. Wir wählen einen zweiten Untermodul  $U \subset M$  maximaler Dimension, sodass  $U \cap N = \{0\}$ . Wäre  $U + N \neq M$  muss ein  $m \in M$  existieren, das nicht in  $U + N$  enthalten ist. Für jedes  $j \in J$  ist

$$V_j = \text{span}_A \{i_j \triangleright m\} = \{a i_j \triangleright m \mid a \in A\} = A i_j \triangleright m = I_j \triangleright m$$

trivial oder einfach. Insbesondere ist entweder  $N \cap V_j = \{0\}$  oder  $N \cap V_j \subset N$  für alle  $1 \leq j \leq n$ . Im ersten Fall haben wir  $V_j \subset U$ , im zweiten Fall  $V_j \subset N$ . Da damit aber  $m = 1_A \triangleright m \in \sum_{j \in J} V_j$  im Widerspruch zu  $m \notin U + N$  steht, muss  $U + N = M$  gelten.

Es verbleibt (iii)  $\implies$  (i) zu zeigen. Für einen gegebenen Modul  $M$  schreiben wir  $\{M_i \subset M \mid i \in I\}$  für die Menge aller einfachen Untermoduln von  $M$ , wobei  $I$  eine geeignete Indexmenge ist, und definieren  $N = \sum_{i \in I} M_i$ . Wäre  $N \neq M$ , dann gäbe es  $U \subset M$  mit  $N \oplus U = M$ . Da  $U$  nicht einfach sein kann gibt es einen maximalen echten Untermodul  $V \subset U$ . Dann ist  $U = V \oplus V'$ , mit  $V$  einfach, was im Widerspruch zur Definition von  $N$  steht. Also gilt  $M = N$ .

Sei nun  $J \subset I$  maximal, sodass die Summe  $N' = \sum_{j \in J} N_j$  direkt ist. Gäbe es ein  $i \in I$  und  $m_i \in M_i$  sodass  $m_i \notin N'$ , so wäre  $M_i \cap N' = (\text{span}_A \{m_i\}) \cap N' = \{0\}$  im Widerspruch zur Maximalität von  $J$ .  $\square$

**THEOREM 5.3 (Artin–Wedderburn).** Sei  $A$  eine endlichdimensionale halbeinfache  $k$ -Algebra und  $M_1, \dots, M_n \subseteq A_{\text{reg}}$  einfache  $A$ -Moduln, sodass  $A_{\text{reg}} \cong M_1^{\oplus i_1} \oplus \dots \oplus M_n^{\oplus i_n}$ . Dann ist  $D_i = \text{End}_A(M_i)$  für jedes  $1 \leq j \leq n$  ein Schiefkörper und es gibt einen Isomorphismus von Algebren

$$(5.1) \quad A \cong \text{Mat}_{i_1}(D_1^{\text{op}}) \times \dots \times \text{Mat}_{i_n}(D_n^{\text{op}}).$$

Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so gilt  $i_j = \dim_k M_i$  für alle  $1 \leq j \leq n$ .

**BEWEISSKIZZE.** Nach Lemma 4.8 gilt  $A^{\text{op}} = \text{End}_A(A)$ . Jede  $A$ -lineare Abbildung  $f: A \rightarrow A$  lässt sich eindeutig zerlegen als  $f = \sum_{j=1}^n g_j$  mit  $g_j: M_j^{\oplus i_j} \rightarrow M_j^{\oplus i_j}$ . Also gilt  $A^{\text{op}} \cong \bigoplus_{j=1}^n \text{End}_A(M_j^{\oplus i_j})$ . Das Lemma von Schur liefert, dass  $\text{End}_A(M_j) = D'_j$  für jedes  $1 \leq j \leq n$  ein Schiefkörper ist und direktes Nachrechnen zeigt  $\text{End}_A(M_j^{\oplus i_j}) = \text{Mat}_{i_j}(D'_j)$ . Für jeden Ring  $R$  und jede Zahl  $m \in \mathbb{N}$  ist Transposition

$$(5.2) \quad T: \text{Mat}_m(R)^{\text{op}} \rightarrow \text{Mat}_m(R^{\text{op}}), \quad A \mapsto A^T$$

ein Isomorphismus von Algebren. Es folgt  $A \cong \text{Mat}_{i_1}(D_1^{\text{op}}) \times \dots \times \text{Mat}_{i_n}(D_n^{\text{op}})$ .

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen und  $1 \leq j \leq n$ . Dann ist  $D_j \cong k$  und das vorangegangene Argument beweist  $M^{\oplus i_j} \cong \text{Mat}_{i_j}(D_j^{\text{op}})$ . Es folgt  $i_j \cdot \dim M_i = i_j^2$  und damit  $i_j = \dim_k M_i$   $\square$

ÜBUNG 5.1. Sei  $D$  ein Schiefkörper und  $i \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl.

- (i) Zeigen Sie, dass  $\text{Mat}_i(D)$  halbeinfach ist.
- (ii) Beweisen Sie, dass jeder einfache  $\text{Mat}_i(D)$ -Modul isomorph zu  $D^i$  ist.
- (iii) Folgern Sie, dass  $\text{Mat}_{i_1}(D) \times \cdots \times \text{Mat}_{i_n}(D)$  genau  $n$  paarweise nicht isomorphe einfache Untermoduln hat.
- (iv) Betrachten Sie schließlich eine endlichdimensionale halbeinfache Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\mathbb{k}$ . Beweisen Sie unter Zuhilfenahme des Satzes von Artin–Wedderburn, dass die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher  $A$ -Moduln gleich der Dimension  $\dim_{\mathbb{k}} Z(A)$  des Zentrums von  $A$  ist. Ist  $A = \mathbb{k}[G]$  eine Gruppenalgebra, so ist  $\dim_{\mathbb{k}} Z(A)$  gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von  $G$ .

Der Satz von Maschke zeigt, dass die Halbeinfachheit von Gruppenalgebren endlicher Gruppen von zwei Größen abhängen: der Charakteristik des Körpers und der Ordnung der Gruppe. Dazu müssen wir  $|G| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} 1_{\mathbb{k}} \in \mathbb{k}$  als Element des Körpers  $\mathbb{k}$  auf. Man beachte, dass  $|G|$  genau dann in  $\mathbb{k}$  invertierbar ist, wenn die Charakteristik von  $\mathbb{k}$  die Ordnung von  $G$  nicht teilt.

**THEOREM 5.4 (Maschke).** Die Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$  einer endlichen Gruppe  $G$  ist genau dann halbeinfach, wenn die Charakteristik  $\text{char } \mathbb{k}$  die Ordnung von  $G$  nicht teilt.

**BEWEIS.** Nehmen wir zunächst an  $\mathbb{k}[G]$  sei halbeinfach. Es sei  $\Lambda' = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{k}[G]$ . Für alle  $h \in G$  gilt

$$(5.3) \quad h \cdot \Lambda' = \sum_{g \in G} hg = \sum_{g' \in G} g' = \Lambda'.$$

Also ist  $\text{span}_{\mathbb{k}}(\Lambda')$  ein eindimensionaler Modul. Nach Lemma 4.11 muss es ein idempotentes Element  $\phi \in \text{End}_{\mathbb{k}[G]}(\mathbb{k}[G])$  geben, sodass  $\text{im } \phi = \text{span}_{\mathbb{k}}(\Lambda')$ . Wir berechnen für alle  $x \in \mathbb{k}[G]$

$$\phi(x) = \phi(x \cdot 1) = x \cdot \phi(1) = x \cdot (\lambda \Lambda') \text{ für ein eindeutiges } \lambda \in \mathbb{k}.$$

Aus Gleichung (5.3) folgt,  $\Lambda'^2 = |G|\Lambda'$ . Damit erhalten wir

$$\phi^2(x) = x \cdot (\lambda \Lambda') \cdot (\lambda \Lambda') = x \cdot (\lambda^2 \Lambda'^2) = |G|\lambda x \cdot (\lambda \Lambda') = |G|\lambda \phi(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{k}[G].$$

Da  $\phi \neq 0$  und  $\phi^2 = \phi$ , muss  $\lambda|G| = 1$  gelten und damit  $|G|$  in  $\mathbb{k}$  invertierbar sein.

Sei umgekehrt  $|G|$  in  $\mathbb{k}$  invertierbar. Wir definieren  $\Lambda = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathbb{k}[G]$ . Gemäß Theorem 5.2 ist  $\mathbb{k}[G]$  genau dann halbeinfach wenn jeder Untermodul  $N \subset M$  eines Moduls  $(M, \triangleright)$  ein Komplement hat. Da  $N$  als Vektorraum ein direkter Summand von  $M$  ist, existiert eine  $\mathbb{k}$ -lineare Abbildung  $\psi \in \text{End}_{\mathbb{k}}(M)$  mit  $\psi^2 = \psi$  und  $\text{im } \psi = N$ . Nun ist, wie in Übung 2.3 besprochen,  $\text{End}_{\mathbb{k}}(M)$  ein  $\mathbb{k}[G]$ -Modul mittels der Wirkung

$$\rightarrow\rightarrow: \mathbb{k}[G] \otimes \text{End}_{\mathbb{k}}(M) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(M), \quad (g \blacktriangleright f)m = g \triangleright f(g^{-1} \triangleright m).$$

Wir wissen aus Übung 2.3, dass  $\text{End}_{\mathbb{k}[G]}(M) = \{\Lambda \blacktriangleright f \mid f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(M)\} \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(M)$ . Definieren wir also  $\phi_M = \Lambda \blacktriangleright \psi: M \longrightarrow M$ . Sei  $m \in M$ . Da  $\psi(m) \in N$  erhalten wir

$$\phi(m) = (\Lambda \blacktriangleright \psi)(m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \triangleright \psi(g^{-1} \triangleright m) \in N.$$

Für alle  $n \in N$  gilt  $\psi(n) = n$  und damit

$$\phi(n) = (\Lambda \blacktriangleright \psi)(n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \triangleright \psi(g^{-1} \triangleright n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \triangleright g^{-1} \triangleright n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n = n.$$

Es folgt  $\phi_M \in \text{End}_{\mathbb{k}[G]}(M)$  ist ein Projektor auf  $N$ . Aus Lemma 4.11 folgt, dass  $N$  ein Komplement haben muss. Der Vollständigkeit halber geben wir es explizit an. Der Kern  $U = \ker \phi$  ist ein Untermodul von  $M$ . Es ist  $U \cap N = \{0\}$  und  $m - \phi(m) \in \ker \phi$  für alle  $m \in M$ . Damit gilt auch  $m = m - \phi(m) + \phi(m) \in U + N$  und somit  $M = U \oplus N$ .  $\square$

Moduln halbeinfacher Algebren zerfallen in direkte Summen ihrer einfachen Untermoduln. Umgekehrt kann man aus einfachen Untermoduln wiederum halbeinfache Moduln definieren indem man ihre äußere direkte Summe betrachtet.

DEFINITION 5.5. Es seien  $(M, \triangleright_M)$  und  $(N, \triangleright_N)$  zwei Moduln einer Algebra  $A$ . Ihre (äußere) direkte Summe ist  $(M \oplus N, \triangleright_{M \oplus N})$ , wobei

$$(5.4) \quad a \triangleright_{M \oplus N}(m, n) = (a \triangleright_M m, a \triangleright_N n), \quad \text{für alle } a \in A, m \in M, n \in N.$$

Man nennt  $(M, \triangleright_M)$  und  $(N, \triangleright_N)$  direkte Summanden des Moduls  $(M \oplus N, \triangleright_{M \oplus N})$ .

Direkte Summen können alternativ durch ihre universelle Eigenschaft charakterisiert werden.

LEMMA 5.6. Seien  $M, N$  zwei  $A$ -Moduln und  $\iota_M: M \rightarrow M \oplus N$  und  $\iota_N: N \rightarrow M \oplus N$  die kanonischen Inklusionen. Für jeden weiteren Modul  $O$  sowie Homomorphismen von Moduln  $f: M \rightarrow O$  und  $g: N \rightarrow O$  existiert eine eindeutige  $A$ -lineare Abbildung  $h: M \oplus N \rightarrow O$ , sodass  $h \circ \iota_M = f$  und  $h \circ \iota_N = g$ .

BEWEIS. Gegeben  $A$ -linearer Abbildungen  $f: M \rightarrow O$  und  $g: N \rightarrow O$  definieren wir

$$h: M \oplus N \rightarrow O, \quad (m, n) \mapsto f(m) + g(n).$$

Diese Abbildung ist linear und für alle  $a \in A, m \in M$  und  $n \in N$  gilt

$$\begin{aligned} h(a \triangleright_{M \oplus N}(m, n)) &= h((a \triangleright_M m, a \triangleright_N n)) = f(a \triangleright_M m) + g(a \triangleright_N n) = a \triangleright_O f(m) + a \triangleright_O g(n) \\ &= a \triangleright_O (f(m) + g(n)) = a \triangleright_O (h(m, n)). \end{aligned}$$

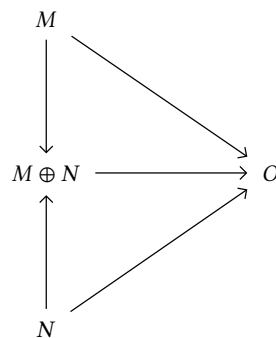
Offensichtlich ist  $h \circ \iota_M = f$  und  $h \circ \iota_N = g$ .

Sei nun  $h': M \oplus N \rightarrow O$  eine weitere  $A$ -lineare Abbildung, sodass  $h' \circ \iota_M = f$  und  $h' \circ \iota_N = g$ . Dann ist

$$\begin{aligned} h'(m, n) &= h'((m, 0) + (0, n)) = h'(\iota_M(m) + \iota_N(n)) = h'(\iota_M(m)) + h'(\iota_N(n)) \\ &= f(m) + g(n) = h(m, 0) + h(0, n) = h(m, n) \end{aligned}$$

für alle  $m \in M$  und  $n \in N$ .  $\square$

ÜBUNG 5.2. Es seien  $M, N, O$  drei Moduln einer Algebra  $A$  und  $f: M \rightarrow O$  und  $g: N \rightarrow O$  zwei  $A$ -lineare Abbildungen. Beschriften Sie die Pfeile des folgenden Diagramms so, dass seine Kommutativität der universellen Eigenschaft der direkten Summe entspricht:



ÜBUNG 5.3. Seien  $M, N, O, P$  vier Moduln einer Algebra  $A$ . Beweisen Sie  $\text{Hom}_A(M \oplus N, O \oplus P) \cong \text{Hom}_A(M, O) \oplus \text{Hom}_A(M, P) \oplus \text{Hom}_A(N, O) \oplus \text{Hom}_A(N, P)$ .

Sei  $(M_t)_{t \in T}$  eine Familie von Moduln die über eine Menge  $T$  indiziert ist. Die Elemente von  $\bigoplus_{t \in T} M_t$  sind Tupel  $(m_t)_{t \in T}$ , wobei  $m_t \in M_t$  und für alle bis auf endlich viele  $t \in T$  gilt  $m_t = 0$ .

LEMMA 5.7. Sei  $T \subset M$  ein Erzeugendensystem des  $A$ -Moduls  $M$ . Dann ist

$$\pi: \bigoplus_{t \in T} A_{\text{reg}} \longrightarrow M, \quad \pi((a_t)_{t \in T}) = \sum_{t \in T} a_t t$$

eine surjektive  $A$ -lineare Abbildung.

ÜBUNG 5.4. Beweisen Sie Lemma 5.7

ÜBUNG 5.5. Beweisen Sie den ersten Homomorphiesatz für Moduln:

Sei  $A$  eine Algebra und  $f: M \rightarrow N$  sowie  $\pi: M \rightarrow Q$  zwei  $A$ -lineare Abbildungen, wobei  $\pi$  surjektiv sei. Falls  $\ker g \subset \ker f$  existiert ein eindeutiger Homomorphismus von  $A$ -Moduln  $h: Q \rightarrow N$ , sodass  $f = h \circ \pi$ .

KOROLLAR 5.8. Ist  $A$  eine halbeinfache Algebra, so ist existiert für jeden einfachen  $A$ -Modul  $M$  ein minimales Ideal  $\{0\} \neq J \subset A$ , sodass  $M \cong J$  als  $A$ -Moduln.

BEWEIS. Da  $M$  nach Annahme einfach ist, definiert jedes Element  $0 \neq m \in M$  ein Erzeugendensystem. Die Abbildung  $\pi: A \rightarrow M, a \mapsto a \triangleright m$  ist nach Lemma 5.7 ein surjektiver Homomorphismus von Moduln. Damit ist  $\ker \pi \subset A$  ein Ideal dessen Komplement wir mit  $J \subset A$  bezeichnen. Die Einschränkung  $\pi|_J: J \rightarrow M$  ist  $A$ -linear und nach Konstruktion bijektiv. Falls  $J$  nicht minimal wäre gäbe es ein echtes Unterideal  $\{0\} \subsetneq I \subsetneq J$ . Dann wäre aber  $\{0\} \subsetneq \pi(I) \subsetneq M$  ein echter Untermodul von  $M$ .  $\square$

Verschiedene minimale Ideale einer halbeinfachen Algebra können isomorphe einfache Moduln definieren. Um Redundanzen zu vermeiden betrachten wir eine *vollständige Familie an Repräsentanten*  $(M_i)_{i \in I}$  einfacher Moduln einer halbeinfachen Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$  betrachten. Das bedeutet für jeden einfachen Modul  $N$  existiert ein eindeutiges  $i \in I$ , sodass  $N \cong M_i$ . Der Satz von Krull–Schmidt, den wir als Lemma in abgeschwächter Form beweisen, zeigt, dass die Wahlen der Repräsentanten die Zerlegung eines endlichdimensionalen Moduls nicht wesentlich beeinflusst.

LEMMA 5.9 (Krull–Schmidt). Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $\mathbb{k}$  ein Körper dessen Charakteristik die Ordnung von  $G$  nicht teilt. Die Anzahl  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  der Isomorphieklassen einfacher  $\mathbb{k}[G]$ -Moduln ist endlich.

Gegeben einer vollständigen Familie  $(M_1, \dots, M_n)$  von Repräsentanten einfacher Moduln lässt sich jeder endlichdimensionale Modul  $N$  zerlegen als  $N \cong M_1^{\oplus j_1} \oplus \dots \oplus M_n^{\oplus j_n}$ . Für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt

$$j_i = \frac{\dim_{\mathbb{k}} \text{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(M_i, N)}{\dim_{\mathbb{k}} \text{End}_{\mathbb{k}[G]}(M_i)}.$$

Insbesondere hängen die Zahlen  $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$  nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.

BEWEIS. Die Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$  ist endlichdimensional und nach dem Satz von Maschke halbeinfach. Wir zerlegen  $\mathbb{k}[G]_{\text{reg}} = N_1 \oplus \dots \oplus N_l$  in eine direkte Summe einfacher

Moduln. Sei  $M$  ein einfacher Modul, dann gibt es ein minimales Ideal  $J \subset \mathbb{k}[G]$  sodass  $M \cong J$ . Nun ist

$$0 < \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(J, \mathbb{k}[G]) = \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(J, N_1 \oplus \cdots \oplus N_l) = \sum_{i=1}^l \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(J, N_i).$$

Folglich muss es eine Zahl  $1 \leq i \leq l$  geben, sodass  $\dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(J, N_i) > 0$ . Gemäß Schur's Lemma muss damit  $M \cong J \cong N_i$  gelten. Es folgt, dass die Anzahl  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  paarweiser nicht-isomorpher einfacher  $\mathbb{k}[G]$ -Moduln höchstens  $l \in \mathbb{N}$  ist.

Wir wählen nun eine vollständige Familie an Repräsentanten einfacher  $\mathbb{k}[G]$ -Moduln  $M_1, \dots, M_n$ . Da  $\mathbb{k}[G]$  halbeinfach ist hat jeder endlichdimensionale Modul  $N$  eine Zerlegung  $N \cong M_1^{\oplus j_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{\oplus j_n}$ . Angenommen es sei  $N \cong M_1^{\oplus j'_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{\oplus j'_n}$  eine zweite Zerlegung. Dann gilt für alle  $1 \leq i \leq n$ , dass

$$\begin{aligned} j_i \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{End}_{\mathbb{k}[G]}(M_i) &= \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(M_i, M_1^{\oplus j_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{\oplus j_n}) = \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(M_i, N) \\ &= \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(M_i, M_1^{\oplus j'_1} \oplus \cdots \oplus M_n^{\oplus j'_n}) = j'_i \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{End}_{\mathbb{k}[G]}(M_i). \end{aligned}$$

Somit ist  $j_i = j'_i = \frac{\dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(M_i, N)}{\dim_{\mathbb{k}} \operatorname{End}_{\mathbb{k}[G]}(M_i)}$  eindeutig.  $\square$

**DEFINITION 5.10.** Sind  $M$  und  $N$  zwei Moduln einer halbeinfachen Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$  einer endlichen Gruppe  $G$  und ist  $M$  einfach, so nennt man

$$[M : N] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(M, N)}{\dim_{\mathbb{k}} \operatorname{End}_{\mathbb{k}[G]}(M)}$$

die *Multiplizität* von  $M$  in  $N$ .

Fassen wir unsere bisherigen Erkenntnisse über die Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$  einer endlichen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\mathbb{k}$  der Charakteristik 0 zusammen:

- (i) Die Algebra  $\mathbb{k}[G]$  ist nach dem Satz von Maschke, siehe Theorem 5.4, halbeinfach.
- (ii) Ein Modul  $M$  ist wegen des Fitting-Lemmas und des Lemmas von Schur, siehe Lemmata 2.15 und 2.19, genau dann einfach, wenn seine Endomorphismen-Algebra isomorph zu  $\mathbb{k}$  ist.
- (iii) Jeder einfache Modul  $M$  ist isomorph zu einem Untermodul  $J \subset \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}$ , siehe Korollar 5.8, und es existiert ein idempotentes Element  $\phi_J \in \operatorname{End}_{\mathbb{k}[G]}(\mathbb{k}[G]_{\text{reg}})$ , sodass  $\operatorname{im} \phi_J = J$ , siehe Lemma 4.11.
- (iv) Wegen des Satzes von Krull-Schmidt, siehe Lemma 5.9 und Übungsaufgabe 5.1 sind die Isomorphieklassen einfacher Moduln in Bijektion mit den Konjugationsklassen von  $G$ . Wählt man eine vollständige Familie von Repräsentanten einfacher Moduln lässt sich jeder endlichdimensionale Modul auf eindeutige Weise als direkte Summe zerlegen.

Was uns bisher fehlt, sind Werkzeuge um die einfachen Moduln möglichst explizit zu bestimmen. Diese erhalten wir aus einer zweite Version des Satzes von Maschke über algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik 0. Die dabei auftretenden Zahlen sind von zentraler Bedeutung für die Darstellungstheorie. Dass sie typischerweise in der Sprache der Darstellungen anstelle der von Moduln definiert sind, gibt uns die Gelegenheit die Übersetzung des einen Settings in das Andere zu wiederholen.

**WIEDERHOLUNG.** Sei  $(M, \triangleright)$  ein Modul der Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$ . Wir können  $M$  als Darstellung von  $G$  auffassen, indem wir den Gruppenhomomorphismus

$$\rho: G \longrightarrow \operatorname{Aut}_{\mathbb{k}}(M), \quad \rho(g)m = g \triangleright m$$

definieren. Umgekehrt ist jede Darstellung  $(V, \varrho)$  von  $G$  ein  $\mathbb{k}[G]$ -Modul mit Wirkung

$$\rightarrow -: \mathbb{k}[G] \otimes V \longrightarrow V, \quad g \triangleright v = \varrho(g)v.$$

DEFINITION 5.11. Der *Charakter* einer endlichdimensionalen Darstellung  $(M, \rho)$  einer Gruppe  $G$  ist

$$(5.5) \quad \chi_{(M,\rho)}: G \longrightarrow \mathbb{k}, \quad g \longmapsto \text{tr}(\rho(g)).$$

Jede halbeinfache Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe hat ein spezielles idempotentes Element  $\Lambda_{\text{triv}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$ . In unserem ersten Beweis des Satzes von Maschke haben wir es benutzt um einen beliebigen Projektor auf einen Untermodul zu  $\mathbb{k}[G]$ -linearisieren. Wir wollen es jetzt in leicht anderer Form benutzen um Projektoren zu definieren.

THEOREM 5.12. Sei  $\mathbb{k}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und  $G$  eine endliche Gruppe. Für jeden einfachen Modul  $M$  gilt  $[M : \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}] = \dim_{\mathbb{k}} M$ . Weiterhin ist

$$(5.6) \quad p_M = \frac{\dim_{\mathbb{k}} M}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_M(g^{-1})g \in \mathbb{k}[G]$$

ein zentrales idempotentes Element, sodass  $\mathbb{k}[G]_{\text{reg}} p_M \cong M^{\dim_{\mathbb{k}} M}$ .

BEWEIS. Wir fixieren einen einfachen Modul  $M$  und schreiben  $\Lambda = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$ .

**Schritt 0. Die Multiplizität von  $M$ :** Nach Korollar 5.8 gibt einen zu  $M$  isomorphen Untermodul  $J \subset \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}$ . Es folgt  $[M : \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}] = \dim_{\mathbb{k}} M$  aus dem Satz von Artin-Wedderburn 5.3.

**Schritt 1. Zentralität von  $p_M$ :** Für alle  $g, h \in G$  ist  $\chi_M(hgh^{-1}) = \chi_M(g)$ . Es folgt

$$h \cdot p_M = \frac{\dim_{\mathbb{k}} M}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_M(h^{-1}g^{-1}h)hgh^{-1}h = \frac{\dim_{\mathbb{k}} M}{|G|} \sum_{g' \in G} \chi_M(g')g'h = p_M \cdot h$$

für alle  $h \in G$ . Demnach ist  $p_M$  zentral.

**Schritt 2. Eine alternative Beschreibung:**

Sei durch die Vektoren  $b_1, \dots, b_n \in M$  eine Basis von  $M$  gegeben und  $\beta_1, \dots, \beta_n \in M^*$  die duale Basis. Eine direkte Rechnung zeigt, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{coev}_M: \mathbb{k}_{\text{triv}} &\longrightarrow M \otimes M^*, & x &\longmapsto \sum_{i=1}^n b_i \otimes \beta_i, \\ \phi_{\text{triv}}: M^* \otimes \mathbb{k}[G] &\longrightarrow M^* \otimes \mathbb{k}[G], & \gamma \otimes x &\longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m \otimes \gamma(g^{-1} \triangleright -) \otimes gx \\ \text{ev}_M: M \otimes M^* &\longrightarrow \mathbb{k}_{\text{triv}}, & \gamma \otimes x &\longmapsto \gamma(m)x \end{aligned}$$

Homomorphismen von Moduln sind. Es sei

$$\begin{aligned} \phi_M &\stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{k}} M \cdot (\text{ev}_M \otimes \text{id}_{\mathbb{k}[G]})(\text{id}_M \otimes \phi_{\text{triv}})(\text{coev}_M \otimes \text{id}_{\mathbb{k}[G]}): \mathbb{k}[G] \longrightarrow \mathbb{k}[G], \\ x &\longmapsto \frac{\dim_{\mathbb{k}} M}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^n \beta_i(g^{-1} \triangleright b_i)g \cdot x. \end{aligned}$$

Für alle  $h \in G$  ist  $\sum_{i=1}^n \beta_i(h \triangleright b_i) = \text{tr}(\rho_M(h)) = \chi_M(h)$ . Somit folgt  $\phi_M(x) = p_M x = x p_M$  für alle  $x \in \mathbb{k}[G]_{\text{triv}}$ .

**Schritt 3. Der Kern von  $\phi_M$ :** Es gibt einen Isomorphismus von Moduln

$$\theta: M^* \otimes \mathbb{k}[G]_{\text{reg}} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M, \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}), \quad \theta(\gamma \otimes x)m = \gamma(m)x.$$

Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir  $f_{\gamma \otimes x} \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\gamma \otimes x)$  für alle Elementartensoren  $\gamma \otimes x \in M^* \otimes \mathbb{k}[G]$ . Aus Übung 2.3 folgt, dass  $\frac{\dim_{\mathbb{k}} M}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^n f_{g \triangleright \beta_i \otimes g \triangleright x}$  ein Homomorphismus von Moduln ist für jedes  $x \in \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}$ . Sei  $N \subset \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}$  ein Untermodul, sodass  $[M : N] = 0$  und  $n \in N$ . Es ist  $\phi_M(n) = \frac{\dim_{\mathbb{k}} M}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^n f_{g \triangleright \beta_i \otimes g \triangleright x}(b_i)$ .

**Schritt 4. Das Bild von  $\phi_M$ :** Sei  $J \subset \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}$  so, dass  $M$  und  $J$  isomorph sind; mit anderen Worten  $[M : J] = 1$ .

Gemäß des Lemmas von Schur gilt  $\phi_M|_J = \lambda \text{id}_J$  für ein  $\lambda \in \text{End}_{\mathbb{k}[G]}(M)$ . Da  $\text{char } \mathbb{k} = 0$  gilt  $\text{tr}(\phi_M|_J) = \lambda \dim_{\mathbb{k}} J = \lambda \dim_{\mathbb{k}} M$ . Wir wählen ein Basis  $b'_1, \dots, b'_n \in J$  mit dualer Basis  $\beta'_1, \dots, \beta'_n \in J^*$ . Man beachte  $(\beta_i \otimes b'_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  ist eine Basis von  $M^* \otimes J$  mit dualer Basis  $(b_i \otimes \beta'_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Wir berechnen

$$\text{tr}(\phi_M|_J) = \frac{\dim_{\mathbb{k}} M}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j=1}^n \beta_i(g^{-1} \triangleright b_i) \beta'_j(g \triangleright b'_j) = \dim_{\mathbb{k}} M \text{tr}(\phi_{\text{triv}}|_J).$$

Da aber  $\phi_{\text{triv}}|_J: M^* \otimes J \rightarrow M^* \otimes J$  ein Projektor ist, ist seine Spur gleich der Dimension des Bildes. Wir wissen  $\theta|_J^{-1} \phi_{\text{triv}}|_J \theta|_J: \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M, J) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M, J)$  ist die Projektion auf die  $\mathbb{k}[G]$ -linearen Abbildungen von  $M$  nach  $J$ . Diese sind, da  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, nach dem Lemma von Schur eindimensional. Es folgt  $\text{tr}(\phi_M|_J) = \dim_{\mathbb{k}} M$  und damit  $\lambda = 1$ . Somit definiert  $\phi_M \in \text{End}_{\mathbb{k}[G]}(\mathbb{k}[G]_{\text{reg}})$  einen Projektor auf den Unterraum

$$\sum_{\substack{M' \subset \mathbb{k}[G]_{\text{reg}}, \\ M' \cong M}} M' \cong M^{\oplus \dim_{\mathbb{k}} M}.$$

□

**ÜBUNG 5.6.** Sei  $(M, \triangleright)$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{k}[G]$ -Modul. In Übung 3.1 wurde gezeigt, dass der Dualraum  $M^*$  ebenfalls ein Modul über  $\mathbb{k}[G]$  ist mittels der Wirkung

$$\rightarrow -: \mathbb{k}[G] \otimes M^* \rightarrow M^*, \quad (g \triangleright \gamma)m = \gamma(g^{-1} \triangleright m)$$

Wir fixieren eine Basis  $b_1, \dots, b_n \in M$  von  $M$  und schreiben  $\beta_1, \dots, \beta_n \in M^*$  für die duale Basis.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{coev}_M: \mathbb{k}_{\text{triv}} &\rightarrow M \otimes M^*, & x &\mapsto \sum_{i=1}^n b_i \otimes \beta_i \\ \text{ev}_M: M \otimes M^* &\rightarrow \mathbb{k}_{\text{triv}}, & \gamma \otimes x &\mapsto \gamma(m)x \end{aligned}$$

Homomorphismen von Moduln sind.

(ii) Nehmen wir an  $G$  sei endlich und  $(\delta_g)_{g \in G}$  die zu  $(g)_{g \in G}$  duale Basis. Beweisen Sie: Die Abbildung

$$\omega: \mathbb{k}[G]_{\text{reg}} \rightarrow (\mathbb{k}[G]_{\text{reg}})^*, \quad g \mapsto \sum_{h \in G} \delta_e(g^{-1}h) \delta_h$$

ist einen Isomorphismus von Moduln.

Wir möchten nun an einigen einfachen Beispielen illustrieren, wie wir aus dem vorangegangenen Satz Projektoren auf einfache Moduln erhalten.

**BEISPIEL 5.13.** Sei  $G = \langle g \mid g^3 = e \rangle$  eine zyklische Gruppe der Ordnung 3. Für jede 3-te Einheitswurzel  $\zeta \in \mathbb{C}$  gibt es eine Darstellung

$$\rho_{\zeta}: \mathbb{C}[G] \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$$

mit  $\rho_\zeta(g)x = \zeta x$  für alle  $x \in \mathbb{C}$ . Der zugehörige Charakter  $\chi_\zeta: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$  hat demnach die Werte

$$\chi_\zeta(e) = 1, \quad \chi_\zeta(g) = \zeta, \quad \chi_\zeta(g^2) = \zeta^2.$$

Damit erhalten wir die zentralen Idempotente  $\Lambda_\zeta = e + \zeta g + \zeta^2 g^2 \in \mathbb{C}[G]$ .

BEISPIEL 5.14. Die symmetrische Gruppe  $S_3$  hat drei einfache nicht-isomorphe komplexe Moduln. Davon sind zwei eindimensional:

$$\begin{aligned} - \triangleright_{\text{triv}} -: \mathbb{C}[S_3] \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \sigma \triangleright_{\text{triv}} \lambda &= \lambda \\ - \triangleright_{\text{sgn}} -: \mathbb{C}[S_3] \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \sigma \triangleright_{\text{sgn}} \lambda &= \text{sgn}(\sigma)\lambda \end{aligned}$$

Die zugehörigen zentralen Idempotente sind

$$\Lambda_{\text{triv}} = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} \sigma \in \mathbb{C}[S_3], \quad \Lambda_{\text{sgn}} = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[S_3].$$

Weiterhin ist die auf  $\mathbb{C}^2$  definierte Standarddarstellung einfach. Ihre Wirkung ist

$$\begin{aligned} \rho_{\text{std}}(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \rho_{\text{std}}((1\ 2)) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \rho_{\text{std}}((1\ 3)) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho_{\text{std}}((2\ 3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & \rho_{\text{std}}((1\ 2\ 3)) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & \rho_{\text{std}}((1\ 3\ 2)) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir schreiben  $z = (1\ 2\ 3)$ . Es ist  $\chi_{\text{std}}(e) = 2$  und  $\chi_{\text{std}}(z) = -1 = \chi_{\text{std}}(z^2)$ . Für alle anderen  $\sigma \in S_3$  ist  $\chi_{\text{std}}(\sigma) = 0$ . Somit ist

$$\Lambda_{\text{std}} = \frac{2}{6}(2e - z - z^2).$$

ÜBUNG 5.7. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle einfachen Moduln der Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G]$  einer endlichen zyklischen Gruppe  $G$  und geben Sie die korrespondierenden Idempotenten an.

ÜBUNG 5.8. Sei  $\mathbb{C}[G]$  die Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe. Beweisen Sie:

- (i) Sind  $M$  und  $N$  zwei nicht-isomorphe einfache Moduln, so erfüllen ihre zugehörigen zentralen Idempotenten die Identität  $p_M p_N = 0$ .
- (ii) Sei  $(M_1, \dots, M_n)$  eine vollständige Familie von Repräsentanten einfacher Moduln. Dann ist  $1_{\mathbb{C}[G]} = \sum_{i=1}^n p_{M_i}$ .

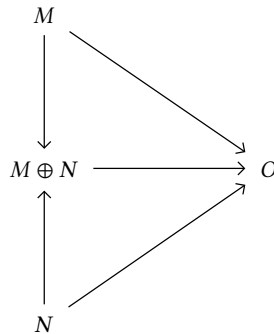
ÜBUNG 5.9. Zeigen Sie, dass die Quaternionengruppe  $Q_8$  vier nicht-isomorphe einfache eindimensionale komplexe Darstellungen hat und finden Sie das zu einer einfachen zweidimensionalen Darstellung gehörende zentrale idempotente Element.

**Übungsaufgaben aus Woche 5.**

ÜBUNG 5.1. Sei  $D$  ein Schiefkörper und  $i \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl.

- (i) Zeigen Sie, dass  $\text{Mat}_i(D)$  halbeinfach ist.
- (ii) Beweisen Sie, dass jeder einfache  $\text{Mat}_i(D)$ -Modul isomorph zu  $D^i$  ist.
- (iii) Folgern Sie, dass  $\text{Mat}_{i_1}(D) \times \dots \times \text{Mat}_{i_n}(D)$  genau  $n$  paarweise nicht isomorphe einfache Untermoduln hat.
- (iv) Betrachten Sie schließlich eine endlichdimensionale halbeinfache Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\mathbb{k}$ . Beweisen Sie unter Zuhilfenahme des Satzes von Artin–Wedderburn, dass die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher  $A$ -Moduln gleich der Dimension  $\dim_{\mathbb{k}} Z(A)$  des Zentrums von  $A$  ist. Ist  $A = \mathbb{k}[G]$  eine Gruppenalgebra, so ist  $\dim_{\mathbb{k}} Z(A)$  gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von  $G$ .

ÜBUNG 5.2. Es seien  $M, N, O$  drei Moduln einer Algebra  $A$  und  $f: M \rightarrow O$  und  $g: N \rightarrow O$  zwei  $A$ -lineare Abbildungen. Beschriften Sie die Pfeile des folgenden Diagramms so, dass seine Kommutativität der universellen Eigenschaft der direkten Summe entspricht:



ÜBUNG 5.3. Seien  $M, N, O, P$  vier Moduln einer Algebra  $A$ . Beweisen Sie  $\text{Hom}_A(M \oplus N, O \oplus P) \cong \text{Hom}_A(M, O) \oplus \text{Hom}_A(M, P) \oplus \text{Hom}_A(N, O) \oplus \text{Hom}_A(N, P)$ .

ÜBUNG 5.4. Beweisen Sie Lemma 5.7

ÜBUNG 5.5. Beweisen Sie den ersten Homomorphiesatz für Moduln:

Sei  $A$  eine Algebra und  $f: M \rightarrow N$  sowie  $\pi: M \rightarrow Q$  zwei  $A$ -lineare Abbildungen, wobei  $\pi$  surjektiv sei. Falls  $\ker g \subset \ker f$  existiert ein eindeutiger Homomorphismus von  $A$ -Moduln  $h: Q \rightarrow N$ , sodass  $f = h \circ \pi$ .

ÜBUNG 5.6. Sei  $(M, \triangleright)$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{k}[G]$ -Modul. In Übung 3.1 wurde gezeigt, dass der Dualraum  $M^*$  ebenfalls ein Modul über  $\mathbb{k}[G]$  ist mittels der Wirkung

$$\rightarrow -: \mathbb{k}[G] \otimes M^* \rightarrow M^*, \quad (g \triangleright \gamma)m = \gamma(g^{-1} \triangleright m)$$

Wir fixieren eine Basis  $b_1, \dots, b_n \in M$  von  $M$  und schreiben  $\beta_1, \dots, \beta_n \in M^*$  für die duale Basis.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{coev}_M: \mathbb{k}_{\text{triv}} &\rightarrow M \otimes M^*, & x &\mapsto \sum_{i=1}^n b_i \otimes \beta_i \\ \text{ev}_M: M \otimes M^* &\rightarrow \mathbb{k}_{\text{triv}}, & \gamma \otimes x &\mapsto \gamma(m)x \end{aligned}$$

Homomorphismen von Moduln sind.

(ii) Nehmen wir an  $G$  sei endlich und  $(\delta_g)_{g \in G}$  die zu  $(g)_{g \in G}$  duale Basis. Beweisen Sie:  
Die Abbildung

$$\omega: \mathbb{k}[G]_{\text{reg}} \longrightarrow (\mathbb{k}[G]_{\text{reg}})^*, \quad g \longmapsto \sum_{h \in G} \delta_e(g^{-1}h)\delta_h$$

ist einen Isomorphismus von Moduln.

ÜBUNG 5.7. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle einfachen Moduln der Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G]$  einer endlichen zyklischen Gruppe  $G$  und geben Sie die korrespondierenden Idempotenten an.

ÜBUNG 5.8. Sei  $\mathbb{C}[G]$  die Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe. Beweisen Sie:

- (i) Sind  $M$  und  $N$  zwei nicht-isomorphe einfache Moduln, so erfüllen ihre zugehörigen zentralen Idempotenten die Identität  $p_M p_N = 0$ .
- (ii) Sei  $(M_1, \dots, M_n)$  eine vollständige Familie von Repräsentanten einfacher Moduln. Dann ist  $1_{\mathbb{C}[G]} = \sum_{i=1}^n p_{M_i}$ .

ÜBUNG 5.9. Zeigen Sie, dass die Quaternionengruppe  $Q_8$  vier nicht-isomorphe einfache eindimensionale komplexe Darstellungen hat und finden Sie das zu einer einfachen zweidimensionalen Darstellung gehörende zentrale idempotente Element.

## 6. Woche 06: Charaktertheorie

[I]t is the precision of the concepts, the shape of the arguments and the nature of the use of symbols and language that are characteristic for mathematics.

---

Edsger W. Dijkstra

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Charaktere und Klassenfunktionen
- (ii) Gruppenwirkungen durch unitäre Abbildungen
- (iii) Elementare Eigenschaften von Charakteren
- (iv) Die Klassifikation von Darstellungen durch ihre Charaktere
- (v) Die Charaktertafel
- (vi) Orthogonalitätsrelationen der Charaktertafel

Satz 5.12 zeigt, dass wesentliche Eigenschaften einfacher Darstellungen durch zentrale Idempotente der entsprechenden Gruppenalgebra bestimmt sind. Bezüglich der kanonischen Basis (die wir mit den Elementen der Gruppe identifiziert haben) sind die Koeffizienten durch Charaktere gegeben.

**Konvention:** Diese Woche werden wir uns auf *endlichdimensionale komplexe Darstellungen endlicher Gruppen* beschränken.

WIEDERHOLUNG. Ein *unitärer Vektorraum* ist ein komplexer Vektorraum  $V$ , zusammen mit einer Abbildung  $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , die man ein *Skalarprodukt* nennt und die die folgenden Axiome für alle  $u, v, w \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  erfüllt:

- (i)  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$  und  $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ ,
- (ii)  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ,
- (iii)  $\langle u, u \rangle \geq 0$  und  $\langle u, u \rangle = 0$  genau dann, wenn  $u = 0$ .

Eine Familie an Vektoren  $(b_i)_{i \in I}$  aus  $V$  heißt ein *Orthonormalsystem*, wenn für alle  $i, j \in I$  mit  $i \neq j$  gilt  $\langle b_i, b_i \rangle = 1$  und  $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ . Jedes Orthonormalsystem ist linear unabhängig. Ist es auch erzeugend, so spricht man von einer *Orthonormalbasis*.

Sei  $U \subset V$  ein Untervektorraum. Sein *orthogonales Komplement* ist

$$U^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Es sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei unitären Vektorräumen  $(V, \langle -, - \rangle_V)$  und  $(W, \langle -, - \rangle_W)$ .

Die zu  $f$  *adjungierte Abbildung*<sup>6</sup>  $f^\vee: W \rightarrow V$  ist eindeutig bestimmt durch

$$\langle f^\vee(w), v \rangle_V = \langle w, f(v) \rangle_W \quad \text{für alle } w \in W, v \in V.$$

Man nennt  $f$  *unitär*, falls es ein Isomorphismus ist und für alle  $u, v \in V$  gilt, dass

$$\langle f(u), f(v) \rangle_W = \langle u, v \rangle_V.$$

In diesem Fall ist  $f^\vee$  das Inverse zu  $f$ .

WIEDERHOLUNG. Der *Charakter* einer endlichdimensionalen Darstellung  $(V, \rho)$  einer Gruppe  $G$  ist die Abbildung

$$\chi_{(V, \rho)}: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \text{tr}(\rho(g)).$$

---

<sup>6</sup>Oftmals wird die adjungierte Abbildung auch mit  $f^*$  bezeichnet. Um das Verwechslungspotential mit der dualen Abbildung zu verringern schreiben wir  $f^\vee$ .

Ergibt sich die Wirkung  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$  aus dem Zusammenhang, schreiben wir auch  $\chi_V \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{(V, \rho)}$ .

**BEISPIEL 6.1.** Sei  $V$  eine eindimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$ . Dann existiert für jedes  $g \in G$  ein  $\lambda_g \in \mathbb{C}$ , sodass  $\rho(g)v = \lambda_g v$  für alle  $v \in V$ . Insbesondere gilt  $\chi_V(g) = \lambda_g$ . Da  $G$  nach Annahme endlich ist, ist  $g^n = e$  für ein  $g \in G$ . Also ist auch  $\lambda_g^n = 1$ . Es folgt, Charaktere eindimensionaler Darstellungen endlicher Gruppen nehmen für jedes Gruppenelement eine Einheitswurzel als Wert an.

**ÜBUNG 6.1.** Zeigen Sie: Ist  $V$  eine mindestens zweidimensionale Darstellung  $V$  einer Gruppe  $G$ , existieren Elemente  $g, h \in G$ , sodass  $\chi_V(gh) \neq \chi_V(g)\chi_V(h)$ .

**ÜBUNG 6.2.** Sei  $(M, \triangleright)$  eine Menge mit einer Wirkung einer Gruppe  $G$ . Der Vektorraum  $\mathbb{C}[M]$  ist eine Darstellung von  $G$  mittels

$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[M]), \quad \rho(g)m = g \triangleright m.$$

Zeigen Sie, dass für alle  $g \in G$  gilt  $\chi_{\mathbb{C}[M]}(g) = |\{m \in M \mid g \triangleright m = m\}|$ .

Charaktere erlauben uns sofort die Dimension einer Darstellung zu bestimmen.

**BEISPIEL 6.2.** Ist  $(V, \rho)$  eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe  $G$ , dann ist  $\chi_V(e) = \text{tr}(\rho(e)) = \text{tr}(\text{id}_V) = \dim_{\mathbb{C}} V$ .

Da Spuren invariant unter zyklischer Permutation sind, hängen Charaktere nur vom Isomorphietyp einer Darstellung ab.

**LEMMA 6.3.** Sind  $V$  und  $W$  isomorphe endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe  $G$ , dann ist  $\chi_V = \chi_W$ .

**BEWEIS.** Sei  $f: V \rightarrow W$  ein Isomorphismus und  $g \in G$ . Wir haben

$$\chi_V(g) = \text{tr}(\rho_V(g) \circ f^{-1} \circ f) = \text{tr}(f^{-1} \circ \rho_W(g) \circ f) = \text{tr}(f \circ f^{-1} \circ \rho_W(g)) = \text{tr}(\rho_W(g)) = \chi_W(g).$$

□

Unser Ziel wird es sein, zu zeigen, dass die Umkehrung der Aussage des vorherigen Lemmas gilt. Neben einem abstrakten Zugang für allgemeine algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik 0, der den Argumenten aus Satz 5.12 folgt, gibt es auch eine geometrische Variante: Wir werden zeigen, dass Charaktere eine Orthonormalbasis des Vektorraums der Klassenfunktionen bilden.

**DEFINITION 6.4.** Eine *Klassenfunktion* ist eine Abbildung  $\xi: G \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass

$$\xi(ghg^{-1}) = \xi(h) \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

Sind  $\xi_1, \xi_2: G \rightarrow \mathbb{C}$  zwei Klassenfunktionen und  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so ist auch

$$\lambda\xi_1 + \xi_2: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \lambda\xi_1(g) + \xi_2(g)$$

eine Klassenfunktion. Damit erhalten wir den Untervektorraum

$$(6.1) \quad \{\xi: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \xi \text{ ist eine Klassenfunktion}\} \subset \mathbb{C}[G]$$

der Klassenfunktionen.

Das nächste Lemma folgt sofort aus der zyklischen Invarianz der Spur.

**LEMMA 6.5.** Der Charakter  $\chi_V$  einer Darstellung  $V$  einer Gruppe  $G$  ist eine Klassenfunktion.

ÜBUNG 6.3. Beweisen Sie Lemma 6.5.

LEMMA 6.6. Der Untervektorraum der Klassenfunktionen einer Gruppe  $G$  bildet das Zentrum  $Z(\mathbb{C}[G])$  ihrer Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[G]$ . Seine Dimension ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von  $G$ .

BEWEIS. Es sei  $\zeta: G \rightarrow \mathbb{C}$  im Zentrum von  $\mathbb{C}[G]$  und  $g \in G$ . Wir schreiben

$$\partial_g: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad \partial_g(h) = \begin{cases} 1 & g = h \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun ist

$$\zeta(hgh^{-1}) = \sum_{x,y,z \in G, xyz=g} \partial_{h^{-1}}(x)\zeta(y)\partial_h(z) = (\partial_{h^{-1}}\zeta\partial_h)(g) = \zeta(g).$$

Es folgt,  $\zeta$  ist eine Klassenfunktion.

Umgekehrt sei  $\xi: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Klassenfunktion und  $\vartheta: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung. Es gilt

$$(\xi\vartheta)(g) = \sum_{x,y \in G, xy=g} \xi(x)\vartheta(y) = \sum_{x,y \in G, xy=g} \vartheta(y)\xi(y^{-1}xy) = \sum_{x,y \in G, yx=g} \vartheta(y)\xi(x) = (\vartheta\xi)(g).$$

Seien  $g_1, \dots, g_n \in G$  so, dass jedes  $g \in G$  zu einem eindeutigen  $g_i$  konjugiert ist. Für  $1 \leq i \leq n$  definieren wir die Klassenfunktion

$$\xi_i: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \begin{cases} 1 & g \text{ ist konjugiert zu } g_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten wir nun eine beliebige Klassenfunktion  $\xi: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Für jedes  $g \in G$  existiert eine eindeutige Zahl  $1 \leq i \leq n$ , sodass  $g$  konjugiert ist zu  $g_i$ . Wir haben

$$\xi(g) = \xi(g_i) = \sum_{j=1}^n \xi(g_j)\xi_j(g_i) = \left( \sum_{j=1}^n \xi(g_j)\xi_j \right) (g).$$

Da die Koeffizienten dieser Linearkombination eindeutig definiert sind, ist  $\xi_1, \dots, \xi_n$  eine Basis des Zentrums  $Z(\mathbb{C}[G])$ .  $\square$

BEMERKUNG 6.7. Wenn wir, wie zuvor, für jedes Element  $g \in G$  die Abbildung  $\partial_g: G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g \in \mathbb{C}[G]$  identifizieren erhalten wir aus dem Beweis des vorangegangenen Lemmas, dass Klassenfunktionen Elementen der Form

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g, \quad \lambda_g \in \mathbb{C}, \text{ wobei } \lambda_g = \lambda_{ghg^{-1}} \text{ für alle } g, h \in G$$

entsprechen.

Um die Rolle der Charaktere im Raum der Klassenfunktionen besser zu verstehen, möchten wir zunächst die grundlegende Arithmetik von Charakteren besser verstehen. Zunächst beobachten wir, dass sich auf jedem Vektorraum ein Skalarprodukt definieren lässt. Dazu fixieren wir eine Basis  $(b_i)_{i \in I}$  und setzen

$$\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Basis  $(b_i)_{i \in I}$  wird so, per Definition, zu einer Orthonormalbasis. Unser Fokus wird insbesondere auf Skalarprodukten liegen, die mit der Gruppenwirkung kompatibel sind.

DEFINITION 6.8. Man bezeichnet ein Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem zugrundeliegenden Vektorraum einer Darstellung  $(V, \rho_V)$  einer Gruppe  $G$  als  $G$ -invariant, wenn

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{für alle } g \in G, v, w \in V.$$

Wie zuvor, werden wir das Element  $\Lambda = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathbb{C}[G]$  benutzen um aus einem gewöhnlichen Skalarprodukt ein  $G$ -invariantes zu erhalten.

LEMMA 6.9. Sei  $(V, \rho)$  eine Darstellung einer Gruppe  $G$  und  $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  ein Skalarprodukt. Dann ist

$$\langle -, - \rangle_G: V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle v, w \rangle_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle$$

ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt.

BEWEIS. Seien  $u, v, w \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle u, v + w \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)(v + w) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle + \langle \rho(g)u, \rho(g)w \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle + \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \langle \rho(h)u, \rho(h)w \rangle = \langle u, v \rangle_G + \langle u, w \rangle_G. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u, \lambda v \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)(\lambda v) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle \\ &= \lambda \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle_G. \end{aligned}$$

$$\langle u, v \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\langle \rho(g)v, \rho(g)u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle_G}.$$

$$\langle u, u \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)u \rangle \geq 0 \text{ und } \langle u, u \rangle_G = 0 \text{ genau dann, wenn } u = 0.$$

Damit ist  $\langle -, - \rangle_G: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  ein Skalarprodukt auf  $V$ . Wir haben für  $g \in G$  und  $u, v \in V$

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \langle \rho(hg)u, \rho(hg)v \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h' \in G} \langle \rho(h')u, \rho(h')v \rangle = \langle u, v \rangle_G.$$

□

In Übung 3.7 haben wir bereits gesehen, dass wir Darstellungen tensorieren können und auch auf Morphismenräumen zwischen Darstellungen wirken können.

DEFINITION 6.10. Sei  $G$  eine Gruppe sowie  $(V, \rho_V)$  und  $(W, \rho_W)$  zwei Darstellungen. Das Tensorprodukt von  $(V, \rho_V)$  und  $(W, \rho_W)$  hat  $V \otimes W$  als zugrundeliegenden Vektorraum und die Wirkung

$$\rho_{V \otimes W}: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V \otimes W), \quad \rho_{V \otimes W}(g)(v \otimes w) = (\rho_V(g)v) \otimes (\rho_W(g)w).$$

Der Raum der  $\mathbb{C}$ -linearen Homomorphismen  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  ist eine Darstellung mittels

$$\rho_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)), \quad \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}(g)f = \rho_W(g) \circ f \rho_V(g^{-1}).$$

Ist  $(W, \rho_W)$  die triviale Darstellung, schreibt man  $(V^*, \rho_{V^*}) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}), \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}_{\text{triv}})})$  und nennt es die *duale Darstellung* von  $(V, \rho_V)$ .

Wir können nun elementare arithmetische Eigenschaften von Charakteren beschreiben.

LEMMA 6.11. Seien  $V$  und  $W$  zwei Darstellungen einer Gruppe  $G$ . Für alle  $g \in G$  gilt

- (i)  $\chi_V(e) = \dim_{\mathbb{C}} V$ ,
- (ii)  $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ ,
- (iii)  $\|\chi_V(g)\| \leq \dim_{\mathbb{C}} V$ , wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\rho_V(g) = \lambda \text{id}_V$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,
- (iv)  $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$
- (v)  $\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g) \chi_W(g)$ ,
- (vi)  $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$
- (vii)  $\chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}(g) = \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g)$

BEWEIS. Wir fixieren ein Element  $g \in G$ .

Zu (i) : Es ist  $\chi_V(e) = \text{tr}(\rho_V(e)) = \text{tr}(\text{id}_V) = \dim_{\mathbb{C}} V$ .

Zu (ii) : Aus Lemma 6.9 folgt, dass es ein Skalarprodukt auf  $V$  gibt, sodass  $G$  diesbezüglich durch unitäre Abbildungen wirkt. Wir wählen eine Orthonormalbasis  $\mathfrak{B}$  von  $V$  und schreiben  $U = \rho(g)_{\mathfrak{B}}$ . Es ist  $U^{\vee} = U^{-1} = \rho(g^{-1})_{\mathfrak{B}}$ . Für  $1 \leq i, j \leq \dim_{\mathbb{C}} V$  gilt  $U_{ij}^{\vee} = \overline{U_{ji}}$ . Daraus folgt  $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ .

Zu (iii) : Sei  $n \in \mathbb{N}$  die Ordnung von  $g$ . Es ist  $\rho_V(g)^n = \rho_V(g^n) = \text{id}_V$ . Damit ist das Minimalpolynom von  $\rho_V(g)$  ein Teiler von  $x^n - 1$  und  $\rho_V(g)$  diagonalisierbar. Die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sind  $n$ -te Einheitswurzeln. Damit haben wir mittels der Dreiecksungleichung

$$\|\chi_V(g)\| = \|\lambda_1 + \dots + \lambda_m\| \leq \|\lambda_1\| + \dots + \|\lambda_m\| = \dim_{\mathbb{C}} V,$$

wobei genau dann Gleichheit gilt, wenn  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$ .

Zu (iv) : Aus Übungsaufgabe 6.4 folgt

$$\chi_{V \oplus W}(g) = \text{tr}(\rho_{V \oplus W}(g)) = \text{tr}(\rho_V(g)) + \text{tr}(\rho_W(g)) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$$

Zu (v) : Mittels Übungsaufgabe 6.4 erhalten wir

$$\chi_{V \otimes W}(g) = \text{tr}(\rho_{V \otimes W}(g)) = \text{tr}(\rho_V(g)) \text{tr}(\rho_W(g)) = \chi_V(g) \chi_W(g).$$

Zu (vi) : Per Definition ist  $\rho_{V^*}(g) = \rho_V(g^{-1})^*$ . Damit folgt die Aussage aus Teil (ii) des Beweises und Übungsaufgabe 6.4

Zu (vii) : Wir betrachten den kanonischen Isomorphismus

$$\vartheta: V^* \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), \quad \vartheta(\gamma \otimes w)v = \gamma(v)w.$$

Sei  $h \in G$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho_{V \otimes W}(h)(\gamma \otimes w))v &= \vartheta(\rho_{V^*}(h)\gamma \otimes \rho_W(h)w)v = \gamma(\rho_V(h^{-1})v)\rho_W(h)w \\ &= (\rho_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}(h)(\vartheta(\gamma \otimes w)))v \end{aligned}$$

Also ist  $\vartheta: V^* \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  ein Isomorphismus von Darstellungen. Die Aussage folgt nun aus Lemma 6.3 sowie den Punkten (v) und (vi). □

ÜBUNG 6.4. Seien  $V, W$  zwei endlichdimensionale Vektorräume und  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  sowie  $g \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ . Wir schreiben

$$\begin{aligned} f \oplus g: V \oplus W &\longrightarrow V \oplus W, & (f \oplus g)(v, w) &= (f(v), g(w)) \\ f \otimes g: V \otimes W &\longrightarrow V \otimes W, & (f \otimes g)v \otimes w &= f(v) \otimes g(w) \\ f^*: V^* &\longrightarrow V^*, & (f^* \gamma)v &= \gamma(f(v)) \end{aligned}$$

- (i) Beweisen Sie, dass  $\text{tr}(f \oplus g) = \text{tr}(f) + \text{tr}(g)$ .  
(ii) Zeigen Sie,  $\text{tr}(f \otimes g) = \text{tr}(f) \text{tr}(g)$ .  
(iii) Begründen Sie, dass  $\text{tr}(f^*) = \text{tr}(f)$ .

THEOREM 6.12. Durch die Abbildung

$$(6.2) \quad \langle -, - \rangle_G: \mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \langle \zeta, \xi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\zeta(g)} \xi(g)$$

ist ein  $G$ -äquivalentes Skalarprodukt auf der regulären Darstellung von  $G$  definiert und für alle Darstellungen  $V, W$  von  $G$  gilt

$$(6.3) \quad \langle \chi_V, \chi_W \rangle_G = \dim \text{Hom}_G(V, W).$$

Sei  $(V_1, \dots, V_n)$  ein vollständige Familie an Repräsentanten einfacher Darstellungen. Ihre Charaktere  $\chi_1, \dots, \chi_n$  bilden ein Orthonormalsystem und spannen das Zentrum  $Z(\mathbb{C}[G])$  auf.

BEWEIS. Um zu sehen, dass  $\langle -, - \rangle_G: \mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathbb{C}$  ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt ist, wählen wir  $g \in G$  und  $\xi, \zeta \in \mathbb{C}[G]$  und bestimmen

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\text{reg}}(g)\zeta, \rho_{\text{reg}}(g)\xi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{(\rho_{\text{reg}}(g)\zeta)(h)} (\rho_{\text{reg}}(g)\xi)(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\zeta(g^{-1}h)} \xi(g^{-1}h) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h' \in G} \overline{\zeta(h')} \xi(h') = \langle \zeta, \xi \rangle_G. \end{aligned}$$

Seien nun  $V$  und  $W$  zwei Darstellungen von  $G$ . Wir schreiben

$$\phi_{\text{triv}}: \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), \quad f \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}(g) f$$

für den Projektor auf den Untervektorraum der Homomorphismen von Darstellungen. Es ist

$$\begin{aligned} \langle \chi_V, \chi_W \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\rho_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}(g)) \\ &= \text{tr} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)}(g) \right) = \text{tr}(\phi_{\text{triv}}). \end{aligned}$$

Da  $\phi_{\text{triv}}$  idempotent ist, folgt  $\dim \text{Hom}_G(V, W) = \dim \text{im } \phi_{\text{triv}} = \text{tr}(\phi_{\text{triv}})$ .

Für einfache Darstellungen  $M$  und  $N$  ergibt sich damit sofort aus dem Lemma von Schur, dass

$$\langle \chi_M, \chi_N \rangle = \dim \text{Hom}_G(M, N) = \begin{cases} 1 & M \cong N, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei also  $(V_1, \dots, V_n)$ , ein vollständige Familie an Repräsentanten einfacher Darstellungen von  $G$  deren Charaktere wir mit  $\chi_1, \dots, \chi_n$  bezeichnen. Diese sind wegen des Lemmas von Schur ein Orthonormalsystem.

Nehmen wir an  $\xi: G \rightarrow \mathbb{C}$  sei eine Klassenfunktion, die orthogonal zum Spann  $\text{span}_{\mathbb{C}}(\chi_1, \dots, \chi_n)$  ist. Für jede Darstellung  $(V, \rho)$  von  $G$  definiert

$$f_{\xi}: V \rightarrow V, \quad v \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi(g) \rho(g^{-1})v$$

einen Homomorphismus von Darstellungen.

Sei  $U \subset V$  einfach, so ist  $f_{\xi}(U) \subset U$  und es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sodass  $f_{\xi}(u) = \lambda u$  für alle  $u \in U$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} \lambda \dim_{\mathbb{C}} U &= \text{tr}(f_{\xi}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi(g) \text{tr}(\rho(g^{-1})) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi(g) \chi_V(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi(g) \overline{\chi_V(g)} = \langle \chi_V, \xi \rangle_G = 0. \end{aligned}$$

Damit ist aber auch  $f_{\xi} = 0$  die (konstante) Nullfunktion. Setzen wir  $V = \mathbb{C}[G]_{\text{reg}}$  folgt, dass  $\xi = 0$ . Also gilt  $\text{span}_{\mathbb{C}}(\chi_1, \dots, \chi_n) = Z(\mathbb{C}[G])$ .  $\square$

Wir wissen wegen des Satzes von Artin–Wedderburn, dass es genau so viele Isomorphieklassen einfacher Darstellungen gibt wie Konjugationsklassen der Gruppe. Daraus folgt ebenfalls, dass die Charaktere das Zentrum der Gruppenalgebra aufspannen.

**KOROLLAR 6.13.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $(V_1, \dots, V_n)$  eine vollständige Familie an Repräsentanten einfacher Darstellungen und  $W$  eine beliebige endlichdimensionale Darstellung. Es gilt:

- (i)  $W \cong V_1^{\langle \chi_W, \chi_{V_1} \rangle} \oplus \dots \oplus V_n^{\langle \chi_W, \chi_{V_n} \rangle}$ ,
- (ii)  $\chi_W = \sum_{i=1}^n \langle \chi_{V_i}, \chi_W \rangle \chi_{V_i}$ ,
- (iii)  $W$  ist genau dann einfach, wenn  $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$ .

**ÜBUNG 6.5.** *Beweisen Sie Korollar 6.13.*

**DEFINITION 6.14.** Es sei  $(V_1, \dots, V_n)$  eine vollständige Familie an Repräsentanten einfacher Darstellungen der Gruppe  $G$  und  $g_1, \dots, g_n$  eine vollständige Familie an Repräsentanten der Konjugationsklassen von  $G$ . Ihre *Charakter-Tafel* ist  $A = (\chi_{V_i}(g_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Die vorherigen Resultate zeigen, dass die Charaktertafel nicht von der Wahl der Repräsentanten der einfachen Darstellungen und der Konjugationsklassen abhängt. Wir präsentieren die Charakter-Tafel als eine Tabelle deren Zeilen wir mit den Repräsentanten einfacher Darstellungen kennzeichnen und deren Spalten mit den Repräsentanten der Konjugationsklassen der Gruppe beschriftet sind.

**BEISPIEL 6.15.** Sei  $G = \langle g \mid g^3 = e \rangle$  die zyklische Gruppe mit 3 Elementen. Wir fixieren  $1 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ , sodass  $\zeta^3 = 1$ . Es gibt drei Isomorphieklassen einfacher Darstellungen. Wir bezeichnen diese mit  $V_{\zeta^0}, V_{\zeta}, V_{\zeta^2}$ , wobei jeweils  $\dim V_i = 1$  und die Wirkung durch die Zuordnung  $\rho_i(g)v = \zeta^i v$  für alle  $v \in V_i$  mit  $0 \leq i \leq 2$  eindeutig definiert ist. Damit ist die Charakter-Tafel

	$e$	$g$	$g^2$
$\chi_{\text{triv}}$	1	1	1
$\chi_{\zeta}$	1	$\zeta$	$\zeta^2$
$\chi_{\zeta^2}$	1	$\zeta^2$	$\zeta$

Wobei  $\chi_{\text{triv}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{V_{\zeta^0}}$ ,  $\chi_{\zeta} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{V_{\zeta^1}}$  und  $\chi_{\zeta^2} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{V_{\zeta^2}}$ .

ÜBUNG 6.6. Bestimmen Sie die Charaktertafel der Gruppen  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und der Quaternionengruppe  $Q_8$ .

Hinweis: Benutzen Sie, dass die Quaternionengruppe 4 nicht-isomorphe einfache Darstellungen hat und dass die Charaktere eine Orthonormalbasis des Zentrums der Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[Q_8]$  sind.

ÜBUNG 6.7. Es seien  $G, H$  zwei Gruppen, deren Charaktertafeln gegeben sind durch:

$G$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$\chi_{triv}$	1	1	1	1
$\chi_1$	1	$i$	-1	$-i$
$\chi_2$	1	-1	1	-1
$\chi_3$	1	$-i$	-1	$i$

$H$	$e$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
$\chi_{triv}$	1	1	1	1
$\chi_1$	1	-1	1	-1
$\chi_2$	1	1	-1	-1
$\chi_3$	1	-1	-1	1

Bestimmen Sie  $G$  und  $H$  bis auf Isomorphie.

ÜBUNG 6.1. Zeigen Sie: Ist  $V$  eine mindestens zweidimensionale Darstellung  $V$  einer Gruppe  $G$ , existieren Elemente  $g, h \in G$ , sodass  $\chi_V(gh) \neq \chi_V(g)\chi_V(h)$ .

ÜBUNG 6.2. Sei  $(M, \triangleright)$  eine Menge mit einer Wirkung einer Gruppe  $G$ . Der Vektorraum  $\mathbb{C}[M]$  ist eine Darstellung von  $G$  mittels

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[M]), \quad \rho(g)m = g \triangleright m.$$

Zeigen Sie, dass für alle  $g \in G$  gilt  $\chi_{\mathbb{C}[M]}(g) = |\{m \in M \mid g \triangleright m = m\}|$ .

ÜBUNG 6.3. Beweisen Sie Lemma 6.5.

ÜBUNG 6.4. Seien  $V, W$  zwei endlichdimensionale Vektorräume und  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  sowie  $g \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ . Wir schreiben

$$\begin{aligned} f \oplus g: V \oplus W &\longrightarrow V \oplus W, & (f \oplus g)(v, w) &= (f(v), g(w)) \\ f \otimes g: V \otimes W &\longrightarrow V \otimes W, & (f \otimes g)v \otimes w &= f(v) \otimes g(w) \\ f^*: V^* &\longrightarrow V^*, & (f^* \gamma)v &= \gamma(f(v)) \end{aligned}$$

- (i) Beweisen Sie, dass  $\text{tr}(f \oplus g) = \text{tr}(f) + \text{tr}(g)$ .
- (ii) Zeigen Sie,  $\text{tr}(f \otimes g) = \text{tr}(f) \text{tr}(g)$ .
- (iii) Begründen Sie, dass  $\text{tr}(f^*) = \text{tr}(f)$ .

ÜBUNG 6.5. Beweisen Sie Korollar 6.13.

ÜBUNG 6.6. Bestimmen Sie die Charaktertafel der Gruppen  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und der Quaternionengruppe  $Q_8$ .

Hinweis: Benutzen Sie, dass die Quaternionengruppe 4 nicht-isomorphe einfache Darstellungen hat und dass die Charaktere eine Orthonormalbasis des Zentrums der Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[Q_8]$  sind.

ÜBUNG 6.7. Es seien  $G, H$  zwei Gruppen, deren Charaktertafeln gegeben sind durch:

$G$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$\chi_{triv}$	1	1	1	1
$\chi_1$	1	$i$	-1	$-i$
$\chi_2$	1	-1	1	-1
$\chi_3$	1	$-i$	-1	$i$

$H$	$e$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
$\chi_{triv}$	1	1	1	1
$\chi_1$	1	-1	1	-1
$\chi_2$	1	1	-1	-1
$\chi_3$	1	-1	-1	1

Bestimmen Sie  $G$  und  $H$  bis auf Isomorphie.

## 7. Woche 07: Eigenschaften von Charaktertafeln

My work has always tried to unite the true with the beautiful and when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.

---

Hermann Weyl

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Die Orthogonalitätsrelationen der Charaktertafel
- (ii) Einige Beispiele für Charaktertafeln
- (iii) Charaktertafeln und normale Untergruppen

*Hinweis:* Wegen des Feiertags findet am Donnerstag keine Vorlesung statt.

*Konvention:* Wir betrachten diese Woche ausschließlich endlichdimensionale komplexe Darstellungen endlicher Gruppen.

Das Ziel dieser Woche ist es kombinatorische Invarianten der Charaktertafel einer endlichen Gruppe zu finden. Zur Wiederholung: Dabei handelt es sich um eine quadratische Matrix deren Größe von der Anzahl der Konjugationsklassen der Gruppe abhängt. Wir schreiben diese als Tabelle und kennzeichnen die Zeilen mit den Repräsentanten einfacher Darstellungen während die Spalten mit den Konjugationsklassen der Gruppe identifiziert werden.

Die reguläre Darstellung einer Gruppe zerlegt sich in die direkte Summe einfacher Unterdarstellungen. Diese Eigenschaft hat ein Pendant auf Seiten der Charaktere. Für ein gegebenes Gruppenelement  $g \in G$  bezeichnen wir mit  $C_g = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$  seine Konjugationsklasse.

LEMMA 7.1. *Es seien  $(V_1, \dots, V_n)$  und  $(g_1, \dots, g_n)$  vollständige Familien an Repräsentanten einfacher Darstellungen beziehungsweise Konjugationsklassen von  $G$ . Die Matrix*

$$U = \left( \sqrt{\frac{|C_{g_j}|}{|G|}} \chi_{V_i}(g_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

*ist unitär.*

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass  $\bar{U}^T U = \text{Id} = U \bar{U}^T$ . Sei  $1 \leq i, j \leq n$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} (U \bar{U}^T)_{ij} &= \sum_{k=1}^n U_{ik} \bar{U}_{kj}^T = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{|C_k|}{|G|}} \sqrt{\frac{|C_k|}{|G|}} \chi_{V_i}(g_k) \overline{\chi_{V_j}(g_k)} = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^n |C_k| \overline{\chi_{V_j}(g_k)} \chi_{V_i}(g_k) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_j}(g)} \chi_{V_i}(g) = \langle \chi_{V_j}, \chi_{V_i} \rangle_G. \end{aligned}$$

Damit ist  $(U \bar{U}^T)_{ij} = 1$  wenn  $i = j$  und 0 sonst und somit  $U \bar{U}^T = \text{Id}$ . Insbesondere ist  $\det U \neq 0$  und  $U$  damit invertierbar. Aus der Eindeutigkeit des Inversen folgt  $U^{-1} = \bar{U}^T$  und  $\bar{U}^T U = U^{-1} U = \text{Id}$ .  $\square$

Das vorangegangene Lemma zeigt, dass die Spaltenvektoren einer Charaktertafel orthogonal sind; im Allgemeinen aber nicht normal. Die Zeilenvektoren erfüllen ebenfalls eine Orthogonalitätseigenschaft wenn man jeden Eintrag entsprechend der zugehörigen Konjugationsklasse reskaliert.

BEISPIEL 7.2. Die symmetrische Gruppe  $S_3$  hat drei Konjugationsklassen. Diese sind  $\{e\}$ ,  $\{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$  und  $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ . Es gibt 2 nicht-isomorphe einfache Darstellungen: Die triviale Darstellung  $(\mathbb{C}, \rho_{\text{triv}})$  und die Vorzeichendarstellung  $(\mathbb{C}, \rho_{\text{sgn}})$ . Damit erhalten wir die ersten zwei Zeilen ihrer Charaktertafel.

$S_3$	$e$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
$\chi_{\text{triv}}$	1	1	1
$\chi_{\text{sgn}}$	1	-1	1
$\chi_{\text{std}}$	2	0	-1

Die dritte Zeile korrespondiert zur Standarddarstellung. Wir wollen ihre Werte verifizieren ohne unsere expliziten Kenntnisse der Darstellung zu benutzen.

Wegen Lemmas 7.1 müssen die Spalten der Charaktertafel orthogonal sein. Es ist demnach

$$0 = (1 \cdot 1) + (1 \cdot (-1)) + (2 \cdot \chi_{\text{std}}((1\ 2))) \iff \chi_{\text{std}}((1\ 2)) = 0,$$

$$0 = (1 \cdot 1) + (1 \cdot (1)) + (2 \cdot \chi_{\text{std}}((1\ 2\ 3))) \iff \chi_{\text{std}}((1\ 2\ 3)) = -1.$$

Exemplarisch wollen wir noch die Orthogonalität zwischen der zweiten und dritten Zeile der Charaktertafel überprüfen. Wir haben

$$1 \cdot 2 + (3 \cdot (-1)) \cdot (3 \cdot 0) + (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot (-1)) = 0.$$

Weiterhin können wir die Norm eines Spaltenvektors der Charaktertabelle explizit ausnutzen um eine Relation mit der Kardinalität der zugehörigen Konjugationsklasse aufzustellen.

KOROLLAR 7.3. Es sei  $C = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$  die Konjugationsklasse eines Elements  $h \in G$ . Es gilt

$$\frac{|G|}{|C|} = \sum_{k=1}^n \overline{\chi_{V_k}(h)} \chi_{V_k}(h),$$

wobei  $(V_1, \dots, V_n)$  eine vollständige Familie an Repräsentanten einfacher Darstellung ist.

$$\text{Für } h = e \text{ ergibt sich } |G| = \sum_{i=1}^n (\chi_{V_i}(e))^2 = \sum_{i=1}^n (\dim_{\mathbb{C}} V_i)^2.$$

BEWEIS. Sei  $(g_1, \dots, g_n)$  eine vollständige Familie an Repräsentanten der Konjugationsklassen von  $G$  und ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $h = g_1$ . Gemäß des vorherigen Lemmas ist die Matrix  $U = \left( \sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}} \chi_{V_i}(g_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  unitär. Damit folgt, dass der erste Spaltenvektor normiert ist. Unter Verwendung von  $g_1 = h$  erhalten wir

$$1 = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{|C_1|}{|G|}} \overline{\chi_{V_i}(g_1)} \cdot \sqrt{\frac{|C_1|}{|G|}} \chi_{V_i}(g_1) = \frac{|C_1|}{|G|} \sum_{i=1}^n \overline{\chi_{V_i}(h)} \chi_{V_i}(h).$$

Es folgt aus  $\chi_V(e) = \dim_{\mathbb{C}} V$  für jede Darstellung  $V$  von  $G$ , dass

$$|G| = \sum_{i=1}^n \overline{\chi_{V_i}(e)} \chi_{V_i}(e) = \sum_{i=1}^n \chi_{V_i}(e)^2 = \sum_{i=1}^n (\dim_{\mathbb{C}} V_i)^2.$$

□

ÜBUNG 7.1. Sei  $G$  eine Gruppe. Wir definieren  $[G, G]$  als die von  $\{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$  erzeugte Untergruppe.

(i) Zeigen Sie, dass  $[G, G]$  eine normale Untergruppe von  $G$  ist. Man nennt den Quotienten  $G_{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/[G, G]$  die Abelianisierung von  $G$ .

- (ii) Sei  $\pi: G \rightarrow G_{ab}$  die kanonische Projektion. Begründen Sie, dass jede Darstellung  $(V, \rho)$  von  $G$  eine Darstellung  $(V, \rho_{ab})$  von  $G_{ab}$  definiert, sodass  $\rho_{ab} \circ \pi = \rho$ .
- (iii) Beweisen Sie dass jede eindimensionale Darstellung  $(V, \rho)$  von  $G_{ab}$ , sich zu einer Darstellung von  $G$  fortsetzen lässt mittels der Wirkung

$$\rho: G \rightarrow V, \quad \rho(g)v = \varrho([g])v.$$

- (iv) Folgern Sie, dass die Isomorphieklassen eindimensionaler Darstellungen von  $G$  und von  $G_{ab}$  in Bijektion stehen.

ÜBUNG 7.2. Betrachten Sie die Diedergruppe  $D_8$  und die Quaternionengruppe  $Q_8$ , bestimmt durch

$$D_8 = \langle a, b \mid a^2 = e, b^4 = e, aba = b^3 \rangle \quad \text{und} \quad Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = e, j^2 = i^2, ji = i^3j \rangle.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $D_8$  und  $Q_8$  nicht isomorph sind.
- (ii) Begründen Sie, dass  $D_8$  und  $Q_8$  vier nicht-isomorphe eindimensionale Darstellungen haben.
- (iii) Seien  $A_{D_8}$  und  $A_{Q_8}$  die Charaktertabellen von  $D_8$  und  $Q_8$ . Beweisen Sie,  $A_{D_8}$  und  $A_{Q_8}$  bis auf Zeilenvertauschung übereinstimmen. Das bedeutet: Es gibt eine Permutationsmatrix  $P$ , sodass  $PA_G = A_H$ .
- (iv) Beweisen Sie, dass die Gruppenalgebren  $\mathbb{C}[D_8]$  und  $\mathbb{C}[Q_8]$  isomorph sind.

ÜBUNG 7.3. Es seien  $V_1, \dots, V_5$  und  $W_1, \dots, W_5$  vollständige Familien an Repräsentanten einfacher Darstellungen von  $D_8$  beziehungsweise  $Q_8$ , wobei

$$D_8 = \langle a, b \mid a^2 = e, b^4 = e, aba = b^3 \rangle \quad \text{und} \quad Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = e, j^2 = i^2, ji = i^3j \rangle.$$

- (i) Bestimmen Sie für jedes  $1 \leq l, k \leq 5$  alle einfachen Unterdarstellungen von  $V_l \otimes V_k$  und ihre Multiplizität.
- (ii) Bestimmen Sie für jedes  $1 \leq l, k \leq 5$  alle einfachen Unterdarstellungen von  $W_l \otimes W_k$  und ihre Multiplizität.

BEISPIEL 7.4. Wir betrachten die symmetrische Gruppe  $S_4$ . Diese hat 5 Konjugationsklassen die durch die Elemente  $e, (1\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)$  und  $(1\ 2\ 3\ 4)$  repräsentiert sind. Es ist  $|C_e| = 1, |C_{(1\ 2)}| = 6, |C_{(1\ 2\ 3)}| = 8, |C_{(1\ 2)(3\ 4)}| = 3$  und  $|C_{(1\ 2\ 3\ 4)}| = 6$ . Wir kennen bereits zwei nicht-isomorphe einfache Darstellungen: Die triviale Darstellung und die alternierende Darstellung (sign representation). Diese tragen wir in die Charaktertabelle von  $S_4$  ein:

$S_4$	$e$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
$\chi_{\text{triv}}$	1	1	1	1	1
$\chi_{\text{sgn}}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_x$	2	0	-1	2	0
$\chi_y$	3	-1	0	-1	1
$\chi_{\text{std}}$	3	1	0	-1	-1

Die Konstruktion der kolorierten Werte wollen wir nun schrittweise nachvollziehen.

Sei  $(b_1, \dots, b_4)$  die Standardbasis von  $\mathbb{C}^4$ . Betrachten wir die Darstellung

$$\rho: S_4 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4), \quad \text{definiert durch} \quad \rho(\sigma)b_i = b_{\sigma(i)}, \quad \text{für alle } \sigma \in S_4.$$

Ihr Charakter erfüllt:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{C}^4}(e) &= 4, & \chi_{\mathbb{C}^4}((1\ 2)) &= 2, & \chi_{\mathbb{C}^4}((1\ 2\ 3)) &= 1, \\ \chi_{\mathbb{C}^4}((1\ 2)(3\ 4)) &= 0, & \chi_{\mathbb{C}^4}((1\ 2\ 3\ 4)) &= 0, \end{aligned}$$

Nun ist

$$\langle \chi_{\text{triv}}, \chi_{\mathbb{C}^4} \rangle_{S_4} = \frac{1}{24} \sum_{g \in S_4} \chi_{\mathbb{C}^4}(g) = \frac{4 + 12 + 8}{24} = 1$$

und damit die triviale Darstellung ein direkter Summand von  $\mathbb{C}^4$  mit Multiplizität eins. Wir schreiben  $\chi_{\text{std}} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_{\text{triv}}$  für den Charakter ihres Komplements. Dieser hat die Werte

$$\begin{aligned} \chi_{\text{std}}(e) &= 3, & \chi_{\text{std}}((1\ 2)) &= 1, & \chi_{\text{std}}((1\ 2\ 3)) &= 0, \\ \chi_{\text{std}}((1\ 2)(3\ 4)) &= -1, & \chi_{\text{std}}((1\ 2\ 3\ 4)) &= -1, \end{aligned}$$

Da  $\langle \chi_{\text{std}}, \chi_{\text{std}} \rangle_{S_4} = \frac{1}{24} \sum_{g \in S_4} \overline{\chi_{\text{std}}(g)} \chi_{\text{std}}(g) = \frac{9+6+3+6}{24} = 1$  ist die zu  $\chi_{\text{std}}$  gehörende Standarddarstellung der Gruppe  $S_4$  einfach.

Sei  $\chi_y \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\text{sgn} \otimes \text{std}}$  der Charakter des Tensorprodukts aus der Vorzeichendarstellung und der Standarddarstellung. Es ist

$$\begin{aligned} \langle \chi_y, \chi_y \rangle_{S_4} &= \frac{1}{24} \sum_{\sigma \in S_4} \overline{\chi_y(\sigma)} \chi_y(\sigma) = \frac{1}{24} \sum_{\sigma \in S_4} \overline{\chi_{\text{sgn}}(\sigma)} \chi_x(\sigma) \chi_{\text{sgn}}(\sigma) \chi_x(\sigma) \\ &= \frac{1}{24} \sum_{\sigma \in S_4} \overline{\chi_x(\sigma)} \chi_x(\sigma) = \langle \chi_x, \chi_x \rangle_{S_4} = 1. \end{aligned}$$

Demnach wird durch  $\chi_y$  eine einfache Darstellung der Dimension  $\chi_y(e) = 3$  beschrieben. Es ist  $\langle \chi_{\text{std}}, \chi_y \rangle = 0$ , woraus folgt, dass wir eine weitere, zu den bereits gefundenen Darstellungen nicht isomorphe, einfache Darstellung haben.

Zu guter Letzt bestimmen wir aus der Orthogonalität der Spalten der Charaktertabelle die fehlende rot markierte Zeile. Diese muss eine 2-dimensionale Darstellung beschreiben, da  $24 = 1^2 + 1^2 + \chi_x(e)^2 + 3^2 + 3^2$  impliziert  $\chi_x(e) = 2$ .

Zum Abschluss des Themenkomplexes wollen wir noch eine Anwendung von Charaktertabellen diskutieren.

**THEOREM 7.5.** Sei  $(V_1, \rho_1), \dots, (V_n, \rho_n)$  eine vollständige Familie an Repräsentanten einfacher Darstellungen der Gruppe  $G$  und  $N \subset G$  eine normale Untergruppe. Es gilt  $N = \bigcap_{i \in I} \ker \rho_i$ , wobei

$$I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid N \subset \ker \rho_i\}.$$

**BEWEIS.** Offensichtlich gilt  $N \subseteq \bigcap_{i \in I} \ker \rho_i$ . Umgekehrt wirkt  $G$  auf  $\mathbb{C}[G/N]$  mittels

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G/N]), \quad \rho(g)[h] = [gh]$$

und es gilt  $\ker \rho = N$ . Nach Lemma 5.9 gilt  $\mathbb{C}[G/N] \cong V_1^{l_1} \oplus \dots \oplus V_n^{l_n}$  für eindeutige Zahlen  $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}$ . Es ist  $\ker \rho = \bigcap_{j \in J} \ker \rho_j$ , wobei  $J = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid l_j \geq 1\}$ . Insbesondere ist  $N \subset \ker \rho_j$  für alle  $j \in J$  und damit  $J \subseteq I$ . Es folgt

$$\bigcap_{i \in I} \ker \rho_i \subseteq \bigcap_{j \in J} \ker \rho_j = N.$$

□

**LEMMA 7.6.** Sei  $(V, \rho_V)$  eine Darstellung einer Gruppe  $G$ . Es gilt

$$\ker \rho_V = \{g \in G \mid \chi_V(g) = \dim V\}.$$

**BEWEIS.** Ist  $g \in \ker \rho_V$ , so ist  $\rho_V(g) = \text{id}_V$  und damit  $\chi_V(g) = \dim V$ . Nehmen wir umgekehrt an  $\chi_V(g) = \dim V$ . Wir wissen wegen Lemma 6.11, dass  $\|\chi_V(g)\| = \dim V$  genau dann, wenn  $\rho_V(g) = \lambda \text{id}_{\mathbb{C}}$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Da dann  $\chi_V(g) = \lambda \dim V$  folgt  $\lambda = 1$  und  $g \in \ker \rho_V$ . □

ÜBUNG 7.4. ChatGPT wurde die Frage gestellt, eine (endliche) Gruppe  $G = N \rtimes H$  zu finden, sodass für eine vollständige Familie an Repräsentanten einfacher Darstellungen  $V_1, \dots, V_n, V_{n+1}$  gilt, dass  $\dim V_1 = \dots = \dim V_n = 1$  und  $\dim V_{n+1} = 3$ .

Bestätigen oder widerlegen Sie die (übersetzte und gekürzte) Antwort.

ChatGPT: Die Ordnung der Gruppe muss  $n+9$  sein, wobei  $n$  die Anzahl der 1-dimensionalen einfachen Darstellungen ist. Wir wählen  $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , wobei  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  durch zyklische Permutation auf  $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  wirkt. Diese Gruppe hat Ordnung 27. Alle Darstellungen der normalen Untergruppe  $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \subset G$  sind eindimensional.

Eine nichttriviale Wirkung von  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  führt zu einer 3-dimensionalen Darstellung. Deshalb hat  $G$  bis auf Isomorphie genau eine 3-dimensionale Darstellung. Alle anderen einfachen Darstellungen sind eindimensional.

ÜBUNG 7.1. Sei  $G$  eine Gruppe. Wir definieren  $[G, G]$  als die von  $\{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$  erzeugte Untergruppe.

- (i) Zeigen Sie, dass  $[G, G]$  eine normale Untergruppe von  $G$  ist. Man nennt den Quotienten  $G_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} G/[G, G]$  die Abelianisierung von  $G$ .
- (ii) Sei  $\pi: G \rightarrow G_{ab}$  die kanonische Projektion. Begründen Sie, dass jede Darstellung  $(V, \rho)$  von  $G$  eine Darstellung  $(V, \rho_{ab})$  von  $G_{ab}$  definiert, sodass  $\rho_{ab} \circ \pi = \rho$ .
- (iii) Beweisen Sie dass jede eindimensionale Darstellung  $(V, \varrho)$  von  $G_{ab}$ , sich zu einer Darstellung von  $G$  fortsetzen lässt mittels der Wirkung

$$\rho: G \rightarrow V, \quad \rho(g)v = \varrho([g])v.$$

- (iv) Folgern Sie, dass die Isomorphieklassen eindimensionaler Darstellungen von  $G$  und von  $G_{ab}$  in Bijektion stehen.

ÜBUNG 7.2. Betrachten Sie die Diedergruppe  $D_8$  und die Quaternionengruppe  $Q_8$ , bestimmt durch

$$D_8 = \langle a, b \mid a^2 = e, b^4 = e, ab a = b^3 \rangle \quad \text{und} \quad Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = e, j^2 = i^2, ji = i^3 j \rangle.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $D_8$  und  $Q_8$  nicht isomorph sind.
- (ii) Begründen Sie, dass  $D_8$  und  $Q_8$  vier nicht-isomorphe eindimensionale Darstellungen haben.
- (iii) Seien  $A_{D_8}$  und  $A_{Q_8}$  die Charaktertabellen von  $D_8$  und  $Q_8$ . Beweisen Sie,  $A_{D_8}$  und  $A_{Q_8}$  bis auf Zeilenvertauschung übereinstimmen. Das bedeutet: Es gibt eine Permutationsmatrix  $P$ , sodass  $PA_G = A_H$ .
- (iv) Beweisen Sie, dass die Gruppenalgebren  $\mathbb{C}[D_8]$  und  $\mathbb{C}[Q_8]$  isomorph sind.

ÜBUNG 7.3. Es seien  $V_1, \dots, V_5$  und  $W_1, \dots, W_5$  vollständige Familien an Repräsentanten einfacher Darstellungen von  $D_8$  beziehungsweise  $Q_8$ , wobei

$$D_8 = \langle a, b \mid a^2 = e, b^4 = e, ab a = b^3 \rangle \quad \text{und} \quad Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = e, j^2 = i^2, ji = i^3 j \rangle.$$

- (i) Bestimmen Sie für jedes  $1 \leq l, k \leq 5$  alle einfachen Unterdarstellungen von  $V_l \otimes V_k$  und ihre Multiplizität.
- (ii) Bestimmen Sie für jedes  $1 \leq l, k \leq 5$  alle einfachen Unterdarstellungen von  $W_l \otimes W_k$  und ihre Multiplizität.

ÜBUNG 7.4. ChatGPT wurde die Frage gestellt, eine (endliche) Gruppe  $G = N \rtimes H$  zu finden, sodass für eine vollständige Familie an Repräsentanten einfacher Darstellungen  $V_1, \dots, V_n, V_{n+1}$  gilt, dass  $\dim V_1 = \dots = \dim V_n = 1$  und  $\dim V_{n+1} = 3$ .

Bestätigen oder widerlegen Sie die (übersetzte und gekürzte) Antwort.

ChatGPT: Die Ordnung der Gruppe muss  $n+9$  sein, wobei  $n$  die Anzahl der 1-dimensionalen einfachen Darstellungen ist. Wir wählen  $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , wobei  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  durch zyklische Permutation auf  $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  wirkt. Diese Gruppe hat Ordnung 27. Alle Darstellungen der normalen Untergruppe  $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \subset G$  sind eindimensional.

Eine nichttriviale Wirkung von  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  führt zu einer 3-dimensionalen Darstellung. Deshalb hat  $G$  bis auf Isomorphie genau eine 3-dimensionale Darstellung. Alle anderen einfachen Darstellungen sind eindimensional.

## 8. Woche 08 und 09: Induktion und Restriktion

The slogan is “Adjoint functors arise everywhere”.

---

Saunders MacLane – Categories for the working mathematician.

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Permutationsdarstellungen
- (ii) Induzierte Darstellungen
- (iii) Restriktionen von Darstellungen
- (iv) Rechenregeln für Induktion und Restriktion

Wir haben in den letzten Wochen verschiedene Kriterien entwickelt um die Einfachheit einer Darstellung zu bestimmen. Eine wiederkehrende Schwierigkeit, besonders bei größeren Gruppen, ist es dabei handhabbare Beispiele von Darstellung zu erhalten auf die wir unsere Methoden anwenden können. Diese wollen wir in dieser Woche entwickeln und dabei Untergruppen von  $G$  und deren Darstellungstheorie benutzen.

Da es sich bei den sogenannten induzierten Darstellungen um abstrakte Gebilde handelt (Linksadjungierte Funktoren in der Sprache der Kategorientheorie) möchten wir parallel dazu möglichst deskriptive Beispiele betrachten.

WIEDERHOLUNG. Eine  $G$ -Menge ist eine Menge  $M$  zusammen mit einer Wirkung  $\triangleright : G \times M \rightarrow M$  der Gruppe  $G$ , sodass für alle  $m \in M$  und  $g, h \in G$  gilt

$$e \triangleright m = m, \quad g \triangleright (h \triangleright m) = gh \triangleright m.$$

BEISPIEL 8.1. Sei  $G$  eine Gruppe und  $H$  eine Untergruppe. Die Menge der Nebenklassen  $G/H \stackrel{\text{def}}{=} \{gH \mid g \in G\}$  ist eine  $G$ -Menge mit der Wirkung

$$\triangleright : G \times G/H \rightarrow G/H, \quad g \triangleright [g'] = [gg'].$$

DEFINITION 8.2. Man nennt eine Darstellung  $(V, \rho)$  einer Gruppe  $G$  eine *Permutationsdarstellung*, wenn es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, sodass  $\rho(g)b \in \mathcal{B}$  für alle  $g \in G$  und  $b \in \mathcal{B}$ .

Sei  $(M, \triangleright)$  eine Menge mit einer Wirkung einer Gruppe  $G$ . Dann ist  $\mathbb{k}[M]$  eine Darstellung von  $M$  mittels  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[M])$ ,  $\rho(g)m = g \triangleright m$ . Jede Permutationsdarstellung ist von dieser Form.

BEISPIEL 8.3. Ist  $H \subset G$  eine Untergruppe, dann ist durch

$$\rho : H^{\text{op}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[G]), \quad \rho(h)g = gh$$

eine Permutationsdarstellung von  $H^{\text{op}}$  auf  $\mathbb{k}[G]$  definiert. Diese Wirkung ist auch mit der regulären Wirkung von  $G$  verträglich: Es gilt  $(lg)h = l(gh)$  für alle  $l, g \in G$  und  $h \in H$ .

Permutationsdarstellungen werden beim Untersuchen der Strukturen induzierter Darstellungen eine zentrale Rolle spielen.

ÜBUNG 8.1. Für eine  $G$ -Menge  $M$  schreiben wir  $M/G$  für die Anzahl der Bahnen und  $\text{Fix}_g(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \mid g \triangleright m = m\}$  für jedes  $g \in G$ . Beweisen Sie mit darstellungstheoretischen Mitteln die Identität

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_g(M)|.$$

Wir betrachten Untergruppen  $K \subset H \subset G$  und eine  $H$ -Menge  $M$ , deren zugehörige Darstellung wir mit  $(\mathbb{k}[M], \rho)$  bezeichnen. Zunächst erhalten wir durch Einschränkung eine Darstellung von  $K$ , die wir mit  $\text{Res}_H^K(\mathbb{k}[M])$  bezeichnen. Um auch eine Darstellung von  $G$  zu erhalten definieren wir den Vektorraum

$$\text{Ind}_H^G(\mathbb{k}[M]) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{[g] \in G/H} \mathbb{k}[M]_{[g]}, \quad \text{wobei } \mathbb{k}[M]_{[g]} = \mathbb{k}[M],$$

der sich aus  $|G/H|$ -Kopien von  $\mathbb{k}[M]$  zusammensetzt. Der besseren Lesbarkeit halber identifizieren wir die Menge  $\{m_{[g]} \mid m \in M, [g] \in G/H\}$  mit der kanonischen Basis von  $\text{Ind}_H^G(\mathbb{k}[M])$ . Sei  $g_1, \dots, g_n \in G$  eine vollständige Familie an Repräsentanten der Nebenklassen  $G/H$ . Dann gibt es für jedes  $g \in G$  ein eindeutiges  $h \in H$  und  $1 \leq i \leq n$ , sodass  $g = g_i h$ . Die Wirkung von  $G$  auf  $\text{Ind}_H^G(\mathbb{k}[M])$  ist gegeben durch

$$\rho_{\text{Ind}_H^G}: G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\text{Ind}_H^G(\mathbb{k}[M])), \quad \rho_{\text{Ind}_H^G}(g)(m_{[g_i]}) = (h \triangleright m)_{[g_j]}, \quad \text{wobei } g g_i = g_j h.$$

Konkret wollen wir über den komplexen Zahlen den Fall  $G = S_3$  und  $H = \{e, (12)\}$  betrachten, wobei  $H$  (trivial) auf der einelementigen Menge  $M = \{m\}$  wirken soll. Um unsere Ausführungen kompakt zu halten, setzen wir  $\sigma_3 = (12)$ ,  $\sigma_2 = (13)$  sowie  $\sigma_1 = (23)$ . Zunächst bestimmen wir die Nebenklassen von  $H$ . Diese sind gegeben durch  $eH = \{e, (12)\}$ ,  $\sigma_2 H = \{(13), (123)\}$  und  $\sigma_1 H = \{(23), (132)\}$ . Um die Wirkung von  $G$  auf dem induzierten Modul  $V = \text{Ind}_H^G(\mathbb{k}_{\text{triv}})$  zu bestimmen berechnen wir für ausgewählte Elemente  $x \in S_3$  eine Faktorisierung  $x = yz$  mit  $y \in \{e, \sigma_2, \sigma_1\}$  und  $z \in H$ :

$$\begin{aligned} \sigma_3 \cdot e &= e \cdot \sigma_3, & \sigma_3 \cdot \sigma_2 &= (132) = \sigma_1 \cdot \sigma_3, & \sigma_3 \cdot \sigma_1 &= (123) = \sigma_2 \cdot \sigma_3, \\ \sigma_2 \cdot e &= \sigma_2 \cdot e, & \sigma_2 \cdot \sigma_2 &= e \cdot e, & \sigma_2 \cdot \sigma_1 &= (132) = \sigma_1 \cdot \sigma_3, \\ \sigma_1 \cdot e &= \sigma_1 \cdot e, & \sigma_1 \cdot \sigma_2 &= (123) = \sigma_2 \cdot \sigma_3, & \sigma_1 \cdot \sigma_1 &= e \cdot e. \end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} \rho_V(\sigma_3)m_{[e]} &= (\sigma_3 \triangleright m)_{[e]} = m_{[e]}, & \rho_V(\sigma_3)m_{[\sigma_2]} &= (\sigma_3 \triangleright m)_{[\sigma_1]} = m_{[\sigma_1]}, & \rho_V(\sigma_3)m_{[\sigma_1]} &= m_{[\sigma_2]}, \\ \rho_V(\sigma_2)m_{[e]} &= (e \triangleright m)_{[\sigma_2]} = m_{[\sigma_2]}, & \rho_V(\sigma_2)m_{[\sigma_2]} &= m_{[e]}, & \rho_V(\sigma_2)m_{[\sigma_1]} &= m_{[\sigma_1]}, \\ \rho_V(\sigma_1)m_{[e]} &= m_{[\sigma_1]}, & \rho_V(\sigma_1)m_{[\sigma_2]} &= m_{[\sigma_2]}, & \rho_V(\sigma_1)m_{[\sigma_1]} &= m_{[e]}. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass  $V \cong \mathbb{k}_{\text{triv}} \oplus \mathbb{k}_{\text{std}}^2$  in die direkte Summe der trivialen Darstellung und der Standarddarstellung zerfällt.

**ÜBUNG 8.2.** Wir betrachten komplexe Darstellungen der Gruppe  $G = Q_8$ .

- (i) Die triviale Gruppe  $\{e\}$  wirkt auf  $M = \{m\}$ . Bestimmen Sie die induzierte Darstellung  $\text{Ind}_{\{e\}}^G(\mathbb{C}[M])$ .
- (ii) Es sei  $H \subset Q_8$  eine vierelementige Untergruppe von  $Q_8$ . Bestimmen Sie den Charakter von  $\text{Ind}_H^G(\mathbb{C}_{\text{triv}})$ .
- (iii) Es sei  $V$  eine einfache zweidimensionale Darstellung von  $Q_8$  und  $H$  eine Untergruppe der Ordnung 4. Zerlegen Sie  $\text{Res}_G^H(V)$  in einfache Unterdarstellungen.

Wir wollen nun Restriktion und Induktion allgemein definieren. Als Vorbereitung betrachten wir zwei Algebren  $A, B$ . Die Gegenalgebra  $B^{\text{op}}$  von  $B$  hat den gleichen zugrundeliegenden Vektorraum und die Multiplikation  $b \cdot^{\text{op}} c \stackrel{\text{def}}{=} cb$ , für  $b, c \in B$ . Jedem  $A \otimes_{\mathbb{k}} B^{\text{op}}$ -Modul  $M$  können wir via

$$\blacktriangleright_A: A \otimes_{\mathbb{k}} M \longrightarrow M, \quad \blacktriangleright_A m = (a \otimes 1_B) \blacktriangleright m, \quad \blacktriangleright_{B^{\text{op}}}: B^{\text{op}} \otimes_{\mathbb{k}} M \longrightarrow M, \quad \blacktriangleright_{B^{\text{op}}} m = (1_A \otimes b) \blacktriangleright m$$

Wirkungen von  $A$  und  $B$  zuordnen. Um hervorzuheben, dass es sich um eine Wirkung der Gegenalgebra von  $B$  handelt schreiben wir  $m \blacktriangleleft_B b \stackrel{\text{def}}{=} b \blacktriangleright_{B^{\text{op}}} m$ . Man beachte, dass gilt

$$(m \blacktriangleleft_B b) \blacktriangleleft_B c = c \blacktriangleright_{B^{\text{op}}}(b \blacktriangleright_{B^{\text{op}}} m) = b c \blacktriangleright_{B^{\text{op}}} m = m \blacktriangleleft_B b c.$$

THEOREM 8.4. Seien  $A, B$  zwei Algebren und  $(M, \blacktriangleright)$  ein  $A \otimes B^{\text{op}}$ -Modul.

(i) Für jeden  $A$ -Modul  $Q$  ist  $\text{Hom}_A(M, Q)$  ein  $B$ -Modul mittels

$$\cdot: B \otimes \text{Hom}_A(M, Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, Q), \quad (b \cdot f)m = f(m \blacktriangleleft_B b).$$

(ii) Für jeden  $B$ -Modul  $P$  ist

$$M \otimes_B P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M \otimes P}{\text{span}_{\mathbb{k}}\{m \blacktriangleleft_B b \otimes p - m \otimes b \triangleright_P p \mid b \in B, m \in M, p \in P\}}$$

ein  $A$ -Modul mittels der Wirkung

$$*: A \otimes (M \otimes_B P) \longrightarrow M \otimes_B P, \quad a * (m \otimes_B p) = (a \blacktriangleright_A m) \otimes_B p,$$

wobei  $m \otimes_B p \stackrel{\text{def}}{=} [m \otimes p]$  für alle  $m \in M$  und  $p \in P$ .

(iii) Ein natürlicher Isomorphismus von Vektorräumen ist durch

$$\varphi: \text{Hom}_A(M \otimes_B P, Q) \longrightarrow \text{Hom}_B(P, \text{Hom}_A(M, Q)), \quad (\varphi(g)p)m = g(m \otimes_B p)$$

gegeben.

(iv) Der Vektorraum  $M^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_A(M, A)$  ist ein  $B \otimes A^{\text{op}}$ -Modul mittels der Wirkung  $((b \otimes a) \triangleright f)m = f(m \blacktriangleleft_B b)a$ . Ist  $(M, \blacktriangleright_A)$  ein direkter Summand der einer endlichen direkten Summe  $A^n$ , so gibt es einen natürlichen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\widehat{\varphi}: \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(M, Q), P) \longrightarrow \text{Hom}_A(Q, \text{Hom}_B(M^*, P)).$$

BEWEIS. Im Folgenden seien  $a, a' \in A$ ,  $b, b' \in B$  und  $m \in M$ ,  $p \in P$ ,  $q \in Q$  sowie  $f \in \text{Hom}_A(M, Q)$ .

Zu (i): Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} (b \cdot f)(a \blacktriangleright_A m) &= f((a \blacktriangleright_A m) \blacktriangleleft_B b) = f((1_A \otimes b) \blacktriangleright ((a \otimes 1_B) \blacktriangleright m)) = f((a \otimes b) \blacktriangleright m) \\ &= f((a \otimes 1_B) \blacktriangleright ((1_A \otimes b) \blacktriangleright m)) = f(a \blacktriangleright_A (m \blacktriangleleft_B b)) = a \triangleright_Q f(m \blacktriangleleft_B b). \end{aligned}$$

Es folgt  $b \cdot f \in \text{Hom}_A(M, Q)$ . Weiterhin ist  $(1_B \cdot f)(m) = f(m \blacktriangleleft_B 1_B) = f(m)$  und

$$(b \cdot (b' \cdot f))(m) = (b' \cdot f)(m \blacktriangleleft_B b) = f((m \blacktriangleleft_B b) \blacktriangleleft_B b') = f(m \blacktriangleleft_B b b') = (b b' \cdot f)(m).$$

Zu (ii): Wir beobachten, dass gilt

$$a \blacktriangleright_A (m \blacktriangleleft_B b) \otimes p - a \blacktriangleright_A m \otimes b \triangleright_P p = (a \blacktriangleright_A m) \blacktriangleleft_B b \otimes p - a \blacktriangleright_A m \otimes b \triangleright_P p.$$

Somit ist  $a * (m \otimes_B p)$  wohldefiniert und wir haben

$$\begin{aligned} 1 * (m \otimes_B p) &= (1 \blacktriangleright_A m) \otimes_B p = m \otimes_B p \\ a * (a' * (m \otimes_B p)) &= a * ((a' \blacktriangleright_A m) \otimes_B p) = (a \blacktriangleright_A (a' \blacktriangleright_A m)) \otimes_B p \\ &= (a a' \blacktriangleright_A m) \otimes_B p = a a' * (m \otimes_B p). \end{aligned}$$

Zu (iii): Um zu zeigen, dass  $\varphi$  wohldefiniert ist betrachten wir  $g \in \text{Hom}_A(M \otimes_B P, Q)$ , und berechnen

$$\begin{aligned} (\varphi(g)p)(a \blacktriangleright_A m) &= g((a \blacktriangleright_A m) \otimes_B p) = g(a * (m \otimes_B p)) \\ &= a \triangleright_Q g(m \otimes_B p) = a \triangleright_Q ((\varphi(g)p)m). \end{aligned}$$

Es folgt, dass  $\varphi(g)p \in \text{Hom}_A(M, Q)$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (b \cdot (\varphi(g)p))m &= (\varphi(g)p)(m \blacktriangleleft_B b) = g(m \blacktriangleleft_B b \otimes_B p) \\ &= g(m \otimes_B b \triangleright_P p) = (\varphi(g)(b \triangleright_P p))m. \end{aligned}$$

Wir definieren die Abbildung

$$\phi^{-1}: \text{Hom}_B(P, \text{Hom}_A(M, Q)) \longrightarrow \text{Hom}_A(M \otimes_B P, Q), \quad \phi^{-1}(h)(m \otimes_B p) = h(p)m.$$

Ihre Wohldefiniertheit ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h)(m \triangleleft_B b \otimes_B p) &= h(p)(m \triangleleft_B b) = h(b \triangleright_P p)m = \phi^{-1}(h)(m \otimes_B b \triangleright_P p), \\ \phi^{-1}(h)(a * (m \otimes_B p)) &= h(p)(a \triangleright_A m) = q \triangleright_Q (h(p)m) = q \triangleright_Q \phi^{-1}(h)(m \otimes_B p). \end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass  $\phi$  und  $\phi^{-1}$  zueinander invers sind.

Zu (iv): Wir definieren auf  $M^* \otimes_A Q$  die Struktur eines  $B$ -Moduls via

$$\cdot: B \otimes (M^* \otimes_A Q) \longrightarrow (M^* \otimes_A Q), \quad b \cdot (f \otimes_A q) = (b \cdot f) \otimes_A q.$$

Die kanonische Abbildung

$$(8.1) \quad \tau: \text{Hom}_A(M, A) \otimes_A Q \longrightarrow \text{Hom}_A(M, Q), \quad \tau(f \otimes_A q)m = f(m) \triangleright_Q q.$$

ist ein wohldefinierter Homomorphismus von  $B$ -Moduln:

$$\begin{aligned} \tau(f \otimes_A q)(a \triangleright_A m) &= f(a \triangleright_A m) \triangleright_Q q = (af(m)) \triangleright_Q q = a \triangleright_Q (\tau(f \otimes_A q)(m)), \\ \tau(f \triangleleft_A a \otimes_A q)m &= (f(m)a) \triangleright_Q q = \tau(f \otimes_A a \triangleright_Q q)m, \\ \tau((b \cdot f) \otimes_A q)m &= f(m \triangleleft_B b) \triangleright_Q q = (b \cdot \tau(f \otimes_A q))m. \end{aligned}$$

Ist  $\tau$  ein Isomorphismus so erhalten wir

$$\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(M, Q), P) \cong \text{Hom}_B(M^* \otimes_A Q, P) \cong \text{Hom}_A(Q, \text{Hom}_B(M^*, P)).$$

Sei  $M^*$  ein direkter Summand von  $A^n$ . Übungsaufgabe 8.4 zeigt, dass es Elemente  $m_1, \dots, m_n \in M$  und  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in M^*$  gibt, sodass für alle  $n \in M$  und  $f \in M^*$  gilt

$$n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(n) \triangleright_A m_i, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x) f(m_i).$$

Wir behaupten, dass

$$\tau^{-1}: \text{Hom}_A(M, Q) \longrightarrow M^* \otimes_A Q, \quad f \longmapsto \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \otimes_A f(m_i)$$

invers zu  $\tau$  ist. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \tau^{-1} \circ \tau(f \otimes_A q) &= \tau^{-1}(f(-) \triangleright_Q q) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \otimes_A f(m_i) \triangleright_Q q \\ &= \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i(-)) \cdot_A f(m_i) \otimes_A q = f \otimes_A q, \\ (\tau \circ \tau^{-1}(g))x &= \tau\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \otimes_A g(m_i)\right)x = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i(x)) \triangleright_Q g(m_i) = g(x). \end{aligned}$$

□

**ÜBUNG 8.3.** *Seien  $A, B, C, D$  vier Algebren und  $M$  ein  $A \otimes_{\mathbb{k}} B^{\text{op}}$ -Modul,  $N$  ein  $B \otimes_{\mathbb{k}} C^{\text{op}}$ -Modul sowie  $O$  ein  $C \otimes D^{\text{op}}$ -Modul.*

(i) *Zeigen Sie, dass  $N \otimes_B O$  ein  $A \otimes_{\mathbb{k}} C^{\text{op}}$ -Modul ist mittels der Wirkung*

$$(a \otimes_{\mathbb{k}} c) \triangleright (m \otimes_B n) = a \triangleright_M m \otimes_B n \triangleleft_N c.$$

(ii) *Begründen Sie, dass  $B$  ein  $B \otimes B^{\text{op}}$ -Modul ist mittels der Wirkung  $(b \otimes_{\mathbb{k}} b') \cdot x = b x b'$ .*

(iii) *Finden Sie Isomorphismen von  $B \otimes C^{\text{op}}$ -Moduln*

$$B \otimes_B M \cong M, \quad M \otimes_C C \cong M.$$

(iv) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus von  $A \otimes D^{\text{op}}$ -Moduln gibt

$$(M \otimes_B N) \otimes_C O \cong M \otimes_B (N \otimes_C O).$$

ÜBUNG 8.4. Sei  $M$  ein  $A \otimes B^{\text{op}}$ -Modul. Zeigen Sie:  $(M, \triangleright_A)$  ist genau dann ein direkter Summand einer endlichen direkten Summe  $A^n$ , wenn es Elemente  $m_1, \dots, m_n \in M$  und  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in M^*$  gibt, sodass für jedes  $n \in M$  und  $f \in M^*$  gilt

$$n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(n) \triangleright_A m_i, \quad \text{und} \quad f(n) = \sum_{i=1}^n f(m_i) \delta_i(n).$$

Mit Moduln zu tensorieren und Abbildungsräume zu betrachten ist in einem präzisen Sinn die einzige Art, Moduln zwischen Algebren zu vergleichen.

BEMERKUNG 8.5. Seien  $A$  und  $B$  zwei Algebren. Wir schreiben  $A\text{-Mod}$  und  $B\text{-Mod}$  für die “Sammlungen” der Homomorphismen von  $A$ -Moduln, beziehungsweise  $B$ -Moduln<sup>7</sup>. Ein *Funktor* ist eine “Abbildung”  $F: B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ , die den Gleichungen

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad F(\text{id}_M) = \text{id}_{F(M)}$$

für alle komponierbaren Abbildungen  $f: M \rightarrow N$  und  $g: N \rightarrow O$  genügt. Man nennt  $F$  *linear*, wenn  $F(\lambda f + g) = \lambda F(f) + F(g)$  für alle  $f, g: M \rightarrow N$  und  $\lambda \in \mathbb{k}$  gilt.

Wir schreiben  $F(M)$  für den  $A$ -Modul der dem Urbild von  $F(\text{id}_M)$  entspricht. Man sagt,  $F$  hat ein *Rechtsadjungiertes*, genau dann, wenn es einen Funktor  $G: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  gibt und für jeden  $A$ -Modul  $P$  und  $B$ -Modul  $Q$  ein Isomorphismus

$$\varphi_{P,Q}: \text{Hom}_A(F(P), Q) \rightarrow \text{Hom}_B(P, G(Q))$$

existiert, sodass  $G(g) \circ \varphi_{Q,P}(h) \circ f = \varphi_{P',Q'}(g \circ h \circ F(f))$  für alle Homomorphismen von  $A$ -Moduln  $h: F(P) \rightarrow Q$  und  $g: Q \rightarrow Q'$  sowie Homomorphismen von  $B$ -Moduln  $f: P' \rightarrow P$ .

*Satz von Eilenberg–Watts:* Sei  $F: B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  ein linearer Funktor. Dann ist äquivalent

- (i)  $F$  hat ein Rechtsadjungiertes,
- (ii) Es gibt einen  $(A \otimes B^{\text{op}})$ -Modul  $M$  und für jeden  $B$ -Modul  $P$  einen  $A$ -linearen Isomorphismus  $\tau_P: M \otimes_B P \rightarrow F(P)$ , sodass für alle Homomorphismen von  $B$ -Moduln  $f: P \rightarrow P'$  gilt, dass  $\tau_{P'} \circ (\text{id}_M \otimes_B f) = F(f) \tau_P$ .

*Beweisskizze:* Wir wissen wegen Theorem 8.4, dass (i) aus (ii) folgt und es reicht die Rückrichtung zu beweisen. Sei  $P$  ein  $B$ -Modul. Für jedes  $p \in P$  ist durch

$$\mu_p: B_{\text{reg}} \rightarrow P, \quad \mu_p(b) = b \triangleright p.$$

eine  $B$ -lineare Abbildung definiert. Angewandt auf den regulären Modul erhält man auf  $F(B)$  eine  $A \otimes B^{\text{op}}$ -Modul-Struktur mittels der Wirkung  $(b \otimes a) \triangleright x = a \triangleright F(\mu_b(x))$ . Die Abbildung  $\sigma: F(B) \times P \rightarrow F(P)$ ,  $(x, p) \mapsto F(\mu_p)x$  ist bilinear und es gilt

$$\sigma(x \triangleleft_B b, p) = F(\mu_p)(x \triangleleft_B b) = F(\mu_p)(F(\mu_b)x) = F(\mu_p \circ \mu_b)x = F(\mu_{b \triangleright_P p})x = \sigma(x, b \triangleright_P p).$$

<sup>7</sup>Sowohl  $A\text{-Mod}$  als auch  $B\text{-Mod}$  sind “zu groß” um Mengen zu sein. Dieses Problem kann auf verschiedene Weisen gelöst werden. Entweder durch den Begriff der *Klasse* oder durch sogenannte *Grothendieck-Universen*, siehe hierzu zum Beispiel [ML98] und [Rie17].

Damit gibt es eine induzierte Abbildung  $\tau_P: F(B) \otimes_B P \rightarrow F(P)$ . Diese erfüllt die in (ii) geforderten Eigenschaften, da das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 F(B) \otimes_B P & \xrightarrow{\tau_P} & F(P) \\
 \downarrow \text{id}_{F(B)} \otimes_B f & \begin{array}{c} x \otimes_B p \mapsto F(\mu_p)x \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ x \otimes_B f(p) \mapsto F(\mu_{f(p)})x \end{array} & \downarrow F(f) \\
 F(B) \otimes_B P' & \xrightarrow{\tau_{P'}} & F(P')
 \end{array}$$

Falls  $P \cong B$  folgt aus direktem Nachrechnen, dass  $\tau_P$  ein Isomorphismus ist. Daraus lässt sich schließen, dass  $\tau_P$  invertierbar ist, wenn  $P \cong \bigoplus_{i \in I} B$ . Ist  $P$  beliebig, dann gibt es eine exakte Sequenz  $0 \xrightarrow{0} R \xrightarrow{f} B^I \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$  und wir erhalten das kommutierende Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 F(B) \otimes_B R & \xrightarrow{\text{id}_{F(B)} \otimes_B f} & F(B) \otimes_B B^I & \xrightarrow{\text{id}_{F(B)} \otimes_B g} & F(B) \otimes_B M & \xrightarrow{0} & 0 \\
 \downarrow \tau_{B^n} & & \downarrow \tau_{B^n} & & \downarrow \tau_M & & \downarrow 0 \\
 F(R) & \xrightarrow{F(f)} & F(B^I) & \xrightarrow{F(g)} & F(M) & \xrightarrow{0} & 0
 \end{array}$$

Es folgt,  $\tau_M$  ist für alle  $B$ -Moduln  $M$  surjektiv. Man erhält nun  $\ker \tau_M = \{0\}$  □

ÜBUNG 8.5. Betrachten Sie das folgende kommutierende Diagramm mit Moduln einer Algebra  $A$  als Ecken und  $A$ -linearen Abbildungen als Pfeilen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 Q & \xrightarrow{q} & R & \xrightarrow{r} & S & \xrightarrow{s} & T & \xrightarrow{t} & U \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\
 V & \xrightarrow{v} & W & \xrightarrow{w} & X & \xrightarrow{x} & Y & \xrightarrow{y} & Z
 \end{array}$$

Wir nehmen an, dass die Zeilen exakt sind. Das heißt, für zwei aufeinander folgende horizontale Pfeile  $f$  und  $g$  gilt  $\text{im } f = \ker g$ . Zeigen Sie, dass wenn  $\beta$  und  $\delta$  Isomorphismen sind,  $\alpha$  surjektiv und  $\epsilon$  injektiv ist,  $\gamma$  ein Isomorphismus ist.

Beispiel 8.3 hat gezeigt, dass wir für jede Untergruppe  $H \subset G$  die Gruppenalgebra  $\mathbb{k}[G]$  als einen  $\mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[H]^{\text{op}}$ -Modul auffassen.

DEFINITION 8.6. Es sei  $H \subset G$  eine Untergruppe,  $V$  eine Darstellung von  $H$  und  $W$  eine Darstellung von  $G$ . Wir bezeichnen  $\text{Res}_G^H(W) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(\mathbb{k}[G], W)$  als die *Restriktion* von  $W$ , sowie  $\text{Ind}_H^G(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V$  als die *Induktion* von  $V$ .

ÜBUNG 8.6. Seien  $K \subset H \subset G$  Untergruppen  $U$  eine Darstellung von  $K$  und  $W$  eine Darstellung von  $G$ . Beweisen Sie die folgenden Relationen

$$\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H(U) \cong \text{Ind}_K^G(U), \quad \text{Res}_H^K \text{Res}_G^H(W) \cong \text{Res}_G^K(W).$$

Betrachten wir eine Darstellung  $V$  einer Untergruppe  $H \subset G$  und wählen wir eine vollständige Familie von Repräsentanten  $(g_1, \dots, g_n)$  der Nebenklassen  $[G/H]$ . Damit gibt es für jedes  $g \in G$  ein eindeutiges  $h \in H$  und  $1 \leq i \leq n$ , sodass  $g = g_i h$ . Uns interessiert im Folgenden der Vektorraum  $I(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{[g] \in G/H} V_{[g]}$ , wobei  $V_{[g]} = V$  für alle  $g \in G$ . Um unsere Rechnungen übersichtlich zu gestalten schreiben wir  $v_{[g]} = (0, \dots, v, 0, \dots, 0) \in I(V)$ , wobei  $v$  an der  $[g]$ -ten Stelle steht.

LEMMA 8.7. Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe.

(i) Jede Darstellung  $W$  von  $G$  ist durch Einschränkung der Wirkung auch eine Darstellung von  $H$  und die Abbildung

$$\nu: W \longrightarrow \text{Res}_G^H(W) = \text{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(\mathbb{k}[G], W), \quad \nu(w)g = \rho_W(g)w$$

ist ein Isomorphismus von Darstellungen von  $H$ .

(ii) Sei  $(g_1, \dots, g_n)$  eine vollständige Familie von Repräsentanten der Nebenklassen  $[G/H]$ . Für jede Darstellung  $V$  von  $H$ , ist durch

$$\xi: \text{Ind}_H^G(V) \longrightarrow \bigoplus_{[g] \in G/H} V \stackrel{\text{def}}{=} I(V), \quad g \otimes_{\mathbb{k}[H]} v \longmapsto (\rho_V(h)v)_{[g]}, \quad \text{mit } g = g_i h$$

ein Isomorphismus von Darstellungen von  $G$  definiert, wobei die Wirkung von  $G$  auf  $I(V)$  bestimmt ist durch  $\rho_{I(V)}(g)v_{[g_i]} = (\rho_V(h)v)_{[g_j]}$  für die eindeutige Zerlegung  $gg_i = g_j h$ .

(iii) Es gibt einen (natürlichen) Isomorphismus von Vektorräumen

$$\Phi: \text{Hom}_{\mathbb{k}[H]}(\text{Res}_G^H(W), V) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(W, \text{Ind}_H^G(V)),$$

$$(8.2) \quad \Phi(f)w \longmapsto \sum_{i=1}^n g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} f(\rho_W(g_i^{-1})w)$$

BEWEIS.

(i) Sei  $f: \mathbb{k}[G] \longrightarrow W$  ein Homomorphismus von Darstellungen. Es gilt

$$f(g) = f(\rho_{\text{reg}}(g)1) = \rho_W(g)f(1).$$

Umgekehrt ist für jedes  $w \in W$  eine Abbildung  $\nu(w): \mathbb{k}[G] \longrightarrow W$  mittels  $\nu(w)g = \rho_W(g)w$  definiert. Wir berechnen

$$\nu(w)(\rho_{\text{reg}}(g)h) = \nu(w)(gh) = \rho_W(gh)w = \rho_W(g)(\rho_W(h)w) = \rho_W(g)(\nu(w)h)$$

für alle  $g, h \in G$ . Also ist  $\nu(w)$  eine  $G$ -äquivariante Abbildung und  $\nu$  ein Isomorphismus. Um zu zeigen dass er auch  $H$ -äquivariant ist, beobachten wir, dass

$$\nu(\rho_{\text{reg}}(h)w)g = \rho_W(g)(\rho_W(h)w) = \rho_W(gh)w = (\rho_{\text{Res}}(h)(\nu(w)))g.$$

(ii) Wir zeigen zunächst, dass die Darstellung  $I(V)$  wohldefiniert ist. Seien  $l, g \in G$  und  $1 \leq i \leq n$ . Es gibt eindeutige Elemente  $h, h' \in H$  und  $1 \leq j, j' \leq n$ , sodass  $gg_i = g_j h$  und  $lg_i = lg_j h' = g_j h' h$ . Wir haben

$$\rho_{I(V)}(l)(\rho_{I(V)}(g)v_{[g_i]}) = \rho_{I(V)}(l)(\rho_V(h)v_{[g_j]}) = (\rho_V(h'h)v)_{[g_j']} = \rho_{I(V)}(lg)v_{[g_i]}.$$

Da außerdem  $\rho_{I(V)}(e_G)v_{[g_i]} = v_{[g_i]}$  folgt,  $I(V)$  ist eine Darstellung von  $G$ . Um zu zeigen, dass  $\xi: \text{Ind}_H^G(V) \longrightarrow I(V)$  wohldefiniert ist, betrachten wir Elemente  $1 \leq i \leq n$ ,  $h \in H$  und  $v \in V$  und beobachten

$$\xi(g_i h \otimes_{\mathbb{k}[H]} v) = (\rho_V(h)v)_{[g_i]} = \xi(g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} \rho_V(h)v).$$

Wir definieren die Abbildung  $\xi^{-1}: I(V) \longrightarrow \text{Ind}_H^G(V)$ ,  $v_{[g_i]} \longmapsto g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} v$  und beobachten

$$\xi \xi^{-1}(v_{[g_i]}) = \xi(g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} v) = v_{[g_i]}$$

$$\xi^{-1} \xi(g \otimes_{\mathbb{k}[H]} v) = \xi^{-1}((\rho_V(h)v)_{[g_i]}) = g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} \rho_V(h)v = g \otimes_{\mathbb{k}[H]} v$$

für alle  $v \in V$ ,  $g \in G$  und  $1 \leq i \leq n$ . Damit folgt, dass  $\xi$  ein Isomorphismus ist.

(iii) Sei  $g \in G$ ,  $v \in V$  und  $f: \text{Res}_G^H(W) \rightarrow V$  eine  $H$ -äquivalente Abbildung. Für jedes  $1 \leq i \leq n$  gibt es ein eindeutiges  $1 \leq j \leq n$ , sodass  $g_i^{-1}g = hg_j^{-1}$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \Phi(f)(\rho_W(g)w) &= \sum_{i=1}^n g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} f(\rho_W(g_i^{-1}g)w) = \sum_{j=1}^n gg_jh^{-1} \otimes_{\mathbb{k}[H]} f(\rho_W(hg_j^{-1})w) \\ &= \sum_{j=1}^n gg_j \otimes_{\mathbb{k}[H]} f(\rho_W(g_j)w) = \rho_{\text{Ind}(W)}(g)(\Phi(f)w). \end{aligned}$$

Somit ist  $\Phi$  wohldefiniert. Sei  $g_1, \dots, g_n$  eine vollständige Familie von Repräsentanten der Nebenklassen  $G/H$  mit  $g_1 = e$ . Unter Zuhilfenahme des Isomorphismus aus Teilaufgabe (ii) setzen wir

$$\begin{aligned} \Psi: \text{Hom}_{\mathbb{k}[G]}(W, \text{Ind}_H^G(V)) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}[H]}(\text{Res}_G^H(W), V), \\ \Psi(f')(w) &= f'(w)_{[e]} \stackrel{\text{def}}{=} \xi(f'(w))_{[e]} \end{aligned}$$

und berechnen

$$\Psi\Phi(f)w = \Psi\left(\sum_{i=1}^n g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} f(\rho_W(g_i^{-1})w)\right) = f(w)$$

für  $f: \text{Res}_G^H(W) \rightarrow V$ . Sei  $f': W \rightarrow \text{Ind}_H^G(V)$ ,  $w \in W$  und  $g_j \in G$ . Es gilt

$$f'(\rho_W(g_j^{-1})w)_{[e]} = \rho_{I(V)}(g_j^{-1})(f'(w))_{[e]} = f'(w)_{[g_j]}.$$

Damit folgt

$$\Phi\Psi(f')w = \sum_{i=1}^n g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} f'(\rho_W(g_i^{-1})w)_{[e]} = f'(w).$$

□

Man nennt die Abbildung aus (8.2) auch die *äußere Spurabbildung*.

ÜBUNG 8.7. Wir betrachten eine Gruppe  $G$  mit einer Untergruppe  $H$  und Darstellungen  $W$  von  $G$  sowie  $V$  von  $H$ .

(i) Sei  $X$  eine weitere Darstellung von  $G$ . Begründen Sie

$$\begin{aligned} \text{Res}_G^H(X \otimes_{\mathbb{k}} W) &\cong \text{Res}_G^H(W) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Res}_G^H(W), \\ \text{Res}_G^H(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, W)) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\text{Res}_G^H(X), \text{Res}_G^H(W)). \end{aligned}$$

(ii) Zeigen Sie, dass  $\text{Ind}_H^G(V^*) \cong \text{Ind}_H^G(V)^*$ .

(iii) Beweisen Sie: Es gibt einen Isomorphismus  $\text{Ind}_H^G(V) \otimes_{\mathbb{k}} W \rightarrow \text{Ind}_H^G(V \otimes_{\mathbb{k}} \text{Res}_G^H(W))$  von Darstellungen von  $G$ .

(iv) Zeigen Sie

$$\text{Ind}_H^G(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(W, \text{Res}_G^H(V))) \cong \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\text{Ind}_H^G(W), V).$$

BEMERKUNG 8.8. Betrachten wir eine Untergruppe  $H \subset G$ , eine vollständigen Familie an Repräsentanten  $g_1, \dots, g_n$  der Nebenklassen  $G/H$  und einer Darstellung  $V$  von  $H$ . Aus Lemma 8.7 folgt, dass für verschiedene Zahlen  $1 \leq i, j \leq n$  die Vektoren  $g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} v$  und  $g_j \otimes_{\mathbb{k}[H]} w$  für alle  $v, w \in V \setminus \{0\}$  linear unabhängig sind. Weiterhin ist ein Erzeugendensystem von  $\text{Ind}_H^G(V)$  durch die Menge  $\{g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} v \mid v \in V, 1 \leq i \leq n\}$  gegeben. Für jedes  $g \in G$  und  $1 \leq i \leq n$  gibt es eindeutige  $h \in H$  und  $1 \leq j \leq n$ , sodass  $gg_i = g_jh$ . Damit ergibt sich

$$\rho_{\text{Ind}}(g)(g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} v) = gg_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} v = g_jh \otimes_{\mathbb{k}[H]} v = g_j \otimes_{\mathbb{k}[H]} \rho_V(h)v.$$

**KOROLLAR 8.9.** Induktionen und Restriktionen von Permutationsdarstellungen sind Permutationsdarstellungen.

**BEWEIS.** Aus Lemma 8.7 folgt, dass jede Restriktion einer Permutationsdarstellung eine Permutationsdarstellung ist.

Sei nun  $H \subset G$  eine Untergruppe  $(M, \triangleright)$  eine  $G$ -Menge und  $g_1, \dots, g_n \in G$  eine vollständige Familie an Repräsentanten der Nebenklassen  $G/H$ . Aus Lemma 8.7 folgt, dass durch  $\{g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} m \mid 1 \leq i \leq n, m \in M\}$  eine Basis von  $\text{Ind}_H^G(\mathbb{k}[M])$  gegeben ist. Für jedes  $g \in G$  ist  $\rho_{\text{Ind}}(g)(g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} m) = g_j \otimes_{\mathbb{k}[H]} (h \triangleright m)$ , wobei  $gg_i = g_j h$ .  $\square$

**LEMMA 8.10.** Sei  $H \subset G$  eine Untergruppe und  $V$  eine Darstellung von  $H$ . Es gilt  $\text{Ind}_H^G(V^*) \cong (*\text{Ind}_H^G(V))$ .

**BEWEIS.** Sei  $g_1, \dots, g_n \in G$  eine vollständige Familie an Repräsentanten der Nebenklassen  $G/H$ . Lemma 8.7 zeigt, dass es eine wohldefinierte lineare Abbildung gibt

$$f: \text{Ind}_H^G(V)^* = (\mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V)^* \longrightarrow \mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V^* = \text{Ind}_H^G(V^*)$$

$$f(\zeta) = \sum_{i=1}^n g_i \otimes f(g_i \otimes -).$$

Sei  $g \in G$ . Es gibt eindeutige  $h_1, \dots, h_n \in H$ , sodass  $g^{-1}g_i = g_j h_j$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(\rho_{\text{Ind}(V)^*}(g)(\zeta)) &= f(\zeta \rho_{\text{Ind}}(g)) = \sum_{i=1}^n g_i \otimes \zeta(g^{-1}g_i \otimes -) \\ &= \sum_{i=1}^n g g_j h_j \otimes \zeta(g_j h_j \otimes -) = \sum_{j=1}^n g g_j \otimes \rho_{V^*}(h_j)(\zeta g_j h_j \otimes -) \\ &= \sum_{j=1}^n g g_j \otimes \zeta(g_j h_j \otimes \rho_V(h^{-1})-) = \sum_{j=1}^n g g_j \otimes \zeta(g_j h_j h_j^{-1} \otimes -) \\ &= \rho_{\text{Ind}(V^*)}(g)(f(\zeta)). \end{aligned}$$

Unser Kandidat  $f^{-1}: \text{Ind}_H^G(V^*) \longrightarrow \text{Ind}_H^G(V)^*$  eines Inversen zu  $f$  ist für alle  $1 \leq i \leq n$  spezifiziert durch

$$f^{-1}(g_i \otimes \xi)(x \otimes v) = \sum_{h \in H} \delta_{g_i}(xh) \xi(\rho_V(h^{-1})v),$$

wobei  $\delta_{g_i}: G \longrightarrow \{0, 1\}$  mit  $\delta_{g_i}(h) = 1$  genau dann, wenn  $h = g_i$ . Wir haben

$$\begin{aligned} (f^{-1}f(\zeta))(x \otimes v) &= \sum_{g=1}^n \sum_{h \in H} \delta_{g_i}(xh) \zeta(g_i) \otimes \rho_V(h^{-1}v) = \zeta(xh) \otimes \rho_V(h^{-1}v) = \zeta(x \otimes v) \\ (ff^{-1})(g \otimes \xi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{h \in H} g_i \otimes \delta_{g_i}(g_i h) \xi(\rho_V(h^{-1})-) = gh^{-1} \otimes \rho_{V^*}(h)\xi = gh^{-1}h \otimes \xi = g \otimes \xi. \end{aligned}$$

$\square$

**KOROLLAR 8.11.** Die reguläre Darstellung  $\mathbb{k}[G]_{\text{reg}}$  von  $G$  ist isomorph zu ihrer dualen Darstellung.

**BEWEIS.** Wir bestimmen

$$\mathbb{k}[G]_{\text{reg}} \cong \text{Ind}_{\{e\}}^G(\mathbb{k}_{\text{triv}}) \cong \text{Ind}_{\{e\}}^G(\mathbb{k}_{\text{triv}}^*) \cong \text{Ind}_{\{e\}}^G(\mathbb{k}_{\text{triv}})^* \cong (\mathbb{k}[G]_{\text{reg}})^*$$

$\square$

ÜBUNG 8.1. Für eine  $G$ -Menge  $M$  schreiben wir  $M/G$  für die Anzahl der Bahnen und  $\text{Fix}_g(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \mid g \triangleright m = m\}$  für jedes  $g \in G$ . Beweisen Sie mit darstellungstheoretischen Mitteln die Identität

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_g(M)|.$$

ÜBUNG 8.2. Wir betrachten komplexe Darstellungen der Gruppe  $G = Q_8$ .

- (i) Die triviale Gruppe  $\{e\}$  wirkt auf  $M = \{m\}$ . Bestimmen Sie die induzierte Darstellung  $\text{Ind}_{\{e\}}^G(\mathbb{C}[M])$ .
- (ii) Es sei  $H \subset Q_8$  eine vierelementige Untergruppe von  $Q_8$ . Bestimmen Sie den Charakter von  $\text{Ind}_H^G(\mathbb{C}_{\text{triv}})$ .
- (iii) Es sei  $V$  eine einfache zweidimensionale Darstellung von  $Q_8$  und  $H$  eine Untergruppe der Ordnung 4. Zerlegen Sie  $\text{Res}_G^H(V)$  in einfache Unterdarstellungen.

ÜBUNG 8.3. Seien  $A, B, C, D$  vier Algebren und  $M$  ein  $A \otimes_{\mathbb{k}} B^{\text{op}}$ -Modul,  $N$  ein  $B \otimes_{\mathbb{k}} C^{\text{op}}$ -Modul sowie  $O$  ein  $C \otimes D^{\text{op}}$ -Modul.

(i) Zeigen Sie, dass  $N \otimes_B O$  ein  $A \otimes_{\mathbb{k}} C^{\text{op}}$ -Modul ist mittels der Wirkung

$$(a \otimes_{\mathbb{k}} c) \triangleright (m \otimes_B n) = a \triangleright_M m \otimes_B n \triangleleft_N c.$$

- (ii) Begründen Sie, dass  $B$  ein  $B \otimes B^{\text{op}}$ -Modul ist mittels der Wirkung  $(b \otimes_{\mathbb{k}} b') \cdot x = b x b'$ .
- (iii) Finden Sie Isomorphismen von  $B \otimes C^{\text{op}}$ -Moduln

$$B \otimes_B M \cong M, \quad M \otimes_C C \cong M.$$

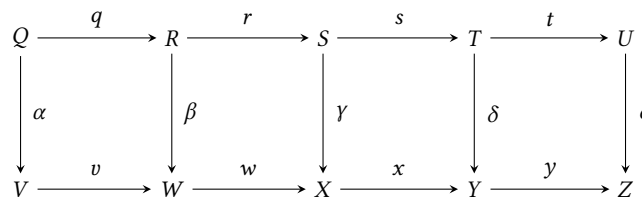
(iv) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus von  $A \otimes D^{\text{op}}$ -Moduln gibt

$$(M \otimes_B N) \otimes_C O \cong M \otimes_B (N \otimes_C O).$$

ÜBUNG 8.4. Sei  $M$  ein  $A \otimes B^{\text{op}}$ -Modul. Zeigen Sie:  $(M, \triangleright_A)$  ist genau dann ein direkter Summand einer endlichen direkten Summe  $A^n$ , wenn es Elemente  $m_1, \dots, m_n \in M$  und  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in M^*$  gibt, sodass für jedes  $n \in M$  und  $f \in M^*$  gilt

$$n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(n) \triangleright_A m_i, \quad \text{und} \quad f(n) = \sum_{i=1}^n f(m_i) \delta_i(n).$$

ÜBUNG 8.5. Betrachten Sie das folgende kommutierende Diagramm mit Moduln einer Algebra  $A$  als Ecken und  $A$ -linearen Abbildungen als Pfeilen.



Wir nehmen an, dass die Zeilen exakt sind. Das heißt, für zwei aufeinander folgende horizontale Pfeile  $f$  und  $g$  gilt  $\text{im } f = \ker g$ . Zeigen Sie, dass wenn  $\beta$  und  $\delta$  Isomorphismen sind,  $\alpha$  surjektiv und  $\epsilon$  injektiv ist,  $\gamma$  ein Isomorphismus ist.

ÜBUNG 8.6. Seien  $K \subset H \subset G$  Untergruppen  $U$  eine Darstellung von  $K$  und  $W$  eine Darstellung von  $G$ . Beweisen Sie die folgenden Relationen

$$\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H(U) \cong \text{Ind}_K^G(U), \quad \text{Res}_H^K \text{Res}_G^H(W) \cong \text{Res}_G^K(W).$$

ÜBUNG 8.7. Wir betrachten eine Gruppe  $G$  mit einer Untergruppe  $H$  und Darstellungen  $W$  von  $G$  sowie  $V$  von  $H$ .

(i) Sei  $X$  eine weitere Darstellung von  $G$ . Begründen Sie

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_G^H(X \otimes_{\mathbb{k}} W) &\cong \operatorname{Res}_G^H(X) \otimes_{\mathbb{k}} \operatorname{Res}_G^H(W), \\ \operatorname{Res}_G^H(\operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(X, W)) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(\operatorname{Res}_G^H(X), \operatorname{Res}_G^H(W)).\end{aligned}$$

(ii) Zeigen Sie, dass  $\operatorname{Ind}_H^G(V^*) \cong \operatorname{Ind}_H^G(V)^*$ .

(iii) Beweisen Sie: Es gibt einen Isomorphismus  $\operatorname{Ind}_H^G(V) \otimes_{\mathbb{k}} W \longrightarrow \operatorname{Ind}_H^G(V \otimes_{\mathbb{k}} \operatorname{Res}_G^H(W))$  von Darstellungen von  $G$ .

(iv) Zeigen Sie

$$\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(W, \operatorname{Res}_G^H(V))) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(\operatorname{Ind}_H^G(W), V).$$

## 10. Woche 10: Mackey's Unzerlegbarkeitskriterium

Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat.

---

Jules Vernes – Reise zum Mond

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Frobenius-Reziprozität
- (ii) Doppelnebenklassen
- (iii) Die Mackey-Formel
- (iv) Mackey's Unzerlegbarkeitskriterium

Unser Ziel ist es induzierte Darstellungen in ihre Unterdarstellungen zu zerlegen. Dazu beginnen wir mit einem Lemma, dass die Charaktertheorie induzierter Darstellungen mit der restringierter Darstellungen verbindet.

LEMMA 10.1 (Frobenius-Reziprozität). *Ist  $H \subset G$  eine Untergruppe,  $V$  eine komplexe Darstellung von  $H$  und  $W$  eine komplexe Darstellung von  $G$ . Es gilt*

$$\langle \chi_{\text{Ind}_H^G(V)}, \chi_W \rangle_G = \langle \chi_V, \chi_{\text{Res}_H^G(W)} \rangle_H.$$

Weiterhin ist für alle  $g \in G$

$$(10.1) \quad \chi_{\text{Ind}_H^G(V)}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{l \in G, lg l^{-1} \in H} \chi_V(lg l^{-1}).$$

BEWEIS.

Zu (i): Aus Theorem 6.12 folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\text{Ind}_H^G(V)}, \chi_W \rangle_G &= \dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G(V), W) \\ &= \dim \text{Hom}_H(V, \text{Res}_G^H(W)) = \langle \chi_V, \chi_{\text{Res}_H^G(W)} \rangle_H. \end{aligned}$$

Zu (ii): Wir betrachten  $V$  als eine Darstellung von  $G$  mittels der trivialen Wirkung. Auf diese Weise wird die kanonische Surjektion  $\pi: \mathbb{C}[G]_{\text{reg}} \otimes_{\mathbb{C}} V \rightarrow \mathbb{C}[G]_{\text{reg}} \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$  eine  $G$ -äquivariante Abbildung. Diese hat eine Sektion

$$\iota: \mathbb{C}[G]_{\text{reg}} \otimes_{\mathbb{C}[H]} V \rightarrow \mathbb{C}[G]_{\text{reg}} \otimes_{\mathbb{C}} V, g \otimes_{\mathbb{C}[H]} v \mapsto \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} gh^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} \rho_V(h)v.$$

Sei  $g \in G$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Ind}_H^G(V)}(g) &= \text{tr}(\rho_{\text{Ind}_H^G(V)}(g)) = \text{tr}(\rho_{\text{Ind}_H^G(V)}(g) \circ \pi \circ \iota) \\ &= \text{tr}(\pi \circ \rho_{\mathbb{C}[G] \otimes V}(g) \circ \iota) = \text{tr}(\rho_{\mathbb{C}[G] \otimes V}(g) \circ \iota \circ \pi). \end{aligned}$$

Für alle  $l \in G$  und  $v \in V$  ist  $\rho_{\mathbb{C}[G] \otimes V}(g) \circ \iota \circ \pi(l^{-1} \otimes v) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} gl^{-1}h^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} \rho_V(h)v$ . Da  $gl^{-1}h^{-1} = l^{-1}$  äquivalent ist zu  $h = lg l^{-1}$  folgt die Aussage.  $\square$

DEFINITION 10.2. Sei  $G$  eine Gruppe,  $H \subset G$  eine Untergruppe und  $V$  eine komplexe Darstellung von  $H$ . Wir nennen  $\text{Ind}_H^G(\chi_V) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\text{Ind}_H^G(V)}$  den *induzierten Charakter* von  $V$ . Ist  $W$  eine komplexe Darstellung von  $G$ , schreiben wir  $\text{Res}_G^H(\chi_W) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\text{Res}_G^H(W)}$  für den *restringierten Charakter* von  $W$ .

Im Folgenden wollen wir bestimmen, wann eine induzierte komplexe Darstellung einfach ist. Wir wissen,  $\text{Ind}_H^G(V)$  ist genau dann einfach, wenn  $\langle \text{Ind}_H^G(\chi_V), \text{Ind}_H^G(\chi_V) \rangle_G = 1$  und aus Frobenius-Reziprozität folgt

$$\langle \text{Ind}_H^G(\chi_V), \text{Ind}_H^G(\chi_V) \rangle_G = \langle \chi_V, \text{Res}_G^H \text{Ind}_H^G(\chi_V) \rangle_H.$$

Um ein Irreduzibilitätskriterium zu erhalten, wollen wir die  $H$ -Wirkung auf  $\text{Res}_G^H \text{Ind}_H^G(V)$  verstehen.

WIEDERHOLUNG. Sei  $G$  eine Gruppe,  $(M, \triangleright)$  eine  $G$ -Menge und  $m \in M$ . Wir schreiben  $Gm = \{g \triangleright m \mid g \in G\}$  für die Bahn des Punkts  $m$  und  $\text{Stab}_G(m) = \{g \in G \mid g \triangleright m = m\}$  für die zugehörige Stabilisator-Untergruppe. Betrachten wir die Abbildung

$$\tau: G/\text{Stab}_G(m) \longrightarrow Gm, \quad [h] \longmapsto h \triangleright m.$$

Diese ist wohldefiniert und für alle  $g \in G$  gilt, dass

$$\tau(g \triangleright [h]) = \tau([gh]) = gh \triangleright m = g \triangleright (h \triangleright m) = g \triangleright \tau([h]).$$

Wir sehen also, dass sich jede Bahn von  $M$  durch Wahl eines Fixpunktes mit einer Untergruppe von  $M$  korrespondiert.

Was passiert mit der Gruppe  $\text{Stab}_G(m)$ , wenn wir einen anderen Fixpunkt  $g \triangleright m \in Gm$  wählen? Es ist

$$h \triangleright (g \triangleright m) \stackrel{!}{=} g \triangleright m \iff g^{-1}hg \triangleright m = m$$

und damit  $\text{Stab}_G(g \triangleright m) = g^{-1} \text{Stab}_G(m)g$ . Die Gruppen  $\text{Stab}_G(m)$  und  $\text{Stab}_G(g \triangleright m)$  sind zwar isomorph, aber im Allgemeinen nicht gleich.

Im Weiteren werden zueinander konjugierte Untergruppen eine wichtige Rolle spielen.

DEFINITION 10.3. Für ein Element  $g \in G$  einer Gruppe und eine Untergruppe  $H \subset G$  schreiben wir  ${}^gH = gHg^{-1}$  für die durch  $g$  zu  $H$  konjugierte Untergruppe.

Ist  $(V, \rho_V)$  eine Darstellung von  $H$ , dann schreiben wir analog  ${}^gV$  für die Darstellung von  ${}^gH$  mit der Wirkung

$$\rho_{{}^gV}: {}^gH \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_{{}^gV}(ghg^{-1})v = \rho_V(h)v.$$

Ist  $H \subset G$  eine Untergruppe,  $g \in G$  und  $V$  eine Darstellung von  $H$ . Schreiben wir  $gv \stackrel{\text{def}}{=} v$  für alle  $v \in {}^gV$ , dann gilt  $\rho_{{}^gV}(ghg^{-1})gv = g\rho_V(h)v$ .

Um zu bestimmen wann eine induzierte Darstellung einfach ist, benötigen wir eine Möglichkeit Induktions- und Restriktionsoperationen miteinander zu vertauschen.

DEFINITION 10.4. Sind  $K, H \subset G$  zwei Untergruppen und  $g \in G$ . Man nennt die Menge  $KxH = \{kxh \mid h \in H, k \in K\}$  die  $(K, H)$ -Doppelnebenklasse von  $x$ .

Die Menge aller  $(K, H)$ -Doppelnebenklassen wird mit  $K \backslash G / H$  bezeichnet.

Doppelnebenklassen partitionieren die zugrundeliegende Menge einer Gruppe.

LEMMA 10.5. Seien  $K, H \subset G$  zwei Untergruppen.

(i)  $K$  wirkt auf der Menge der Nebenklassen  $G/H$  mittels Multiplikation

$$\triangleright: K \times G/H \longrightarrow G/H, \quad k \triangleright gH = kgH.$$

Analog gibt es eine Rechtswirkung von  $H$  auf den Nebenklassen  $K \backslash G$ .

(ii) Für jedes  $g \in G$  ist  $KgH$  eine disjunkte Vereinigung von Nebenklassen  $G/H$  und ebenso eine disjunkte Vereinigung von  $K \backslash G$ .

(iii) Zwei Doppelnebenklassen  $KgH$  und  $Kg'H$  sind entweder disjunkt oder gleich. Sei  $I$  eine Menge und  $(g)_{i \in I}$  eine vollständige Familie an Repräsentanten der Doppelnebenklassen  $K \backslash G/H$ . Es gilt

$$G = \sqcup_{i \in I} Kg_iH.$$

BEWEIS. Im Folgenden seien  $k, k' \in K$ ,  $h, h' \in H$  und  $g, g' \in G$ .

Zu (i): Wir beobachten, dass  $e \triangleright gH = egH = gH$  und

$$k \triangleright (k' \triangleright gH) = k \triangleright k'gH = kk'gH = kk' \triangleright (gH)$$

gilt. Also wirkt  $K$  auf der Menge der Nebenklassen  $G/H$ . Das gleiche Argument zeigt, dass  $H$  auf der Menge  $K \backslash G$  wirkt.

Zu (ii): Es ist  $\cup_{k \in K} kgH = KgH = \cup_{h \in H} Kgh$ . Da zwei Nebenklassen entweder disjunkt oder gleich sind folgt die Aussage.

Zu (iii): Sei  $x \in KgH \cap Kg'H$ . Dann gibt es per Definition  $k, k' \in K$  und  $h, h' \in H$ , sodass  $kgh = x = k'g'h'$ . Damit folgt aber, dass  $g = k^{-1}k'g'h'h^{-1} \in Kg'H$  und somit  $KgH \subset Kg'H$ . Analog erhält man  $Kg'H \subset KgH$ . □

ÜBUNG 10.1. Die Gruppe  $S_n$  wirkt auf  $\{1, \dots, n\}$  mittels  $\sigma \triangleright j = \sigma(j)$  für alle  $\sigma \in S_n$  und  $1 \leq j \leq n$ . Bestimmen Sie die Untergruppe  $H = \text{Stab}_{S_n}(n)$  und die Kardinalität von  $H \backslash S_n/H$ .

Sei  $\Delta \subset \text{GL}_n(\mathbb{k})$  die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Bestimmen Sie  $|\Delta \backslash G/\Delta|$ .

Sind  $K$  und  $H$  zwei Untergruppen von  $G$  so ist  $\mathbb{k}[G]$  ein  $\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[H]^{\text{op}}$ -Modul via

$$-\triangleright -: (\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[H]^{\text{op}}) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[G] \longrightarrow \mathbb{k}[G], \quad (k \otimes h) \triangleright g = kgh.$$

Sei  $(g_i)_{i \in I}$  eine vollständige Familie von Repräsentanten der Doppelnebenklassen  $K \backslash G/H$ . Als Konsequenz des Lemmas 10.5 haben wir eine Zerlegung  $\mathbb{k}[G] = \oplus_{i \in I} \mathbb{k}[Kg_iH]$  in eine direkte Summe von  $\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[H]^{\text{op}}$ -Moduln.

Für  $g \in G$  ist  $\mathbb{k}[gH] \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}_{\mathbb{k}}\{gh \mid h \in H\} \subset \mathbb{k}[G]$  ein Untervektorraum auf dem  ${}^sH = gHg^{-1}$  mittels Multiplikation wirkt:

$$\rho: gHg^{-1} \longrightarrow \mathbb{k}[gH] \quad \rho(ghg^{-1})gh' = ghg^{-1}gh' = gh'h'.$$

Das bedeutet  $\mathbb{k}[gH]$  entspricht der  ${}^sH$ -Darstellung  ${}^s\mathbb{k}[H]$ . Dies liefert eine weitere Beschreibung der Summanden  $\mathbb{k}[Kg_iH]$ .

LEMMA 10.6. Es seien  $K, H \subset G$  Untergruppen und  $g \in G$ . Als  $(\mathbb{k}[K] \otimes \mathbb{k}[H]^{\text{op}})$ -Modul gilt

$$\mathbb{k}[KgH] \cong \mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap {}^sH]} \mathbb{k}[gH],$$

wobei die Wirkung auf der rechten Seite gegeben ist durch

$$-\triangleright -: (\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[H]^{\text{op}}) \otimes (\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap {}^sH]} \mathbb{k}[gH]) \longrightarrow (\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap {}^sH]} \mathbb{k}[gH]),$$

$$(k \otimes_{\mathbb{k}} h) \triangleright (k' \otimes_{\mathbb{k}[K \cap {}^sH]} gh') = kk' \otimes_{\mathbb{k}[K \cap {}^sH]} gh'h'.$$

BEWEIS. Eine direkte Rechnung, siehe Übung 10.2, zeigt, dass  $\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap {}^sH]} \mathbb{k}[gH]$  mittels der angegebenen Wirkung eine Darstellung von  $\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[H]^{\text{op}}$  ist. Seien  $k, k' \in K$  und  $h, h' \in H$ . Es ist  $kgh = k'gh'$  genau dann, wenn

$$k^{-1}k' = gh'h'^{-1}g^{-1} \in K \cap {}^sH.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} k \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} gh &= kk^{-1}k'gh'h^{-1}g^{-1} \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} gh = k' \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} gh'h^{-1}g^{-1}gh \\ &= k' \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} gh'. \end{aligned}$$

Es gibt demnach lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{k}[KgH] &\longrightarrow \mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} \mathbb{k}[gH], & kgh &\longmapsto k \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} gh \\ \phi^{-1}: \mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} \mathbb{k}[gH] &\longrightarrow \mathbb{k}[KgH], & k \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} h &\longmapsto kgh. \end{aligned}$$

Offensichtlich sind  $\phi$  und  $\phi^{-1}$  invers zueinander und eine direkte Rechnung zeigt, dass  $\phi$  eine  $\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[H]^{\text{op}}$ -lineare Abbildung ist.  $\square$

**ÜBUNG 10.2.** Zeigen Sie, dass die  $\mathbb{k}[K] \otimes \mathbb{k}[H]^{\text{op}}$ -Wirkung auf  $\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} \mathbb{k}[gH]$  aus Lemma 10.6 wohldefiniert ist.

Wir können nun untersuchen, inwiefern sich die Reihenfolge von Induktion und Restriktion umkehren lässt.

**THEOREM 10.7 (Mackey-Formel).** Seien  $H, K \subset G$  zwei Untergruppen und  $V$  eine Darstellung von  $H$ . Es gibt einen  $K$ -äquivalenten Isomorphismus

$$(10.2) \quad \text{Res}_G^K \text{Ind}_H^G V \cong \bigoplus_{[x] \in K \backslash G/H} \text{Ind}_{K \cap^x H}^K \text{Res}_{xH}^{K \cap^x H}(xV).$$

**BEWEIS.** Wir definieren eine lineare Abbildung

$$f: \mathbb{k}[H] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V \longrightarrow V, \quad h \otimes_{\mathbb{k}[H]} w \longrightarrow \rho_V(h)w.$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass sie wohldefiniert ist und ein Inverses durch

$$f^{-1}: V \longrightarrow \mathbb{k}[H] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V, \quad v \longmapsto e \otimes_{\mathbb{k}[H]} v$$

gegeben ist. Weiterhin ist  $f$  eine  $L$ -äquivalente Abbildung für jede Untergruppe  $L \subset H$ . Es folgt insbesondere  $\text{Res}_H^L(V) \cong \mathbb{k}[H] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V$ .

Sei  $g_1, \dots, g_n$  eine vollständige Familie an Repräsentanten der Doppelnebenklassen  $K \backslash G/H$ .

$$\begin{aligned} \text{Res}_G^K \text{Ind}_H^G V &\cong \text{Res}_G^K (\mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{k}[Kg_iH] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} \mathbb{k}[g_iH]) \otimes_{\mathbb{k}[H]} V \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} (\mathbb{k}[g_iH] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} (\mathbb{k}[g_iH g_i^{-1}] \otimes_{\mathbb{k}[g_iH g_i^{-1}]} {}^s V) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap^s H]} \text{Res}_{g_iH}^{K \cap^s H}({}^s V) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Ind}_{K \cap^s H}^K \text{Res}_{g_iH}^{K \cap^s H}({}^s V). \end{aligned}$$

$\square$

**ÜBUNG 10.3.** Seien  $H, K \subset G$  zwei Untergruppen. Benutzen Sie Mackey's Formel um die Identität

$$\text{Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ind}_H^G(W) \cong \bigoplus_{[g] \in K \backslash G/H} \text{Ind}_{K \cap^g H}^G (\text{Res}_K^{K \cap^g H}(V) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Res}_{gH}^{K \cap^g H}(W))$$

zu beweisen. Hinweis: Benutzen Sie, dass  $G$  eine Untergruppe von  $G \times G$  ist.

Wir können jetzt Mackey's Formel benutzen um zu bestimmen, wann induzierte Darstellungen einfach sind.

**KOROLLAR 10.8 (Mackey's Irreduzibilitätskriterium).** Für eine Untergruppe  $H \subset G$  und eine komplexe Darstellung  $V$  von  $H$  ist  $\text{Ind}_H^G(V)$  genau dann einfach, wenn  $V$  einfach ist und für jedes  $x \in G \setminus H$  gilt

$$\langle \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V), \text{Res}_H^{H \cap xH}(\chi_V) \rangle_{H \cap xH} = 0.$$

**BEWEIS.** Die Darstellung  $\text{Ind}_H^G(V)$  ist genau dann einfach, wenn

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \text{Ind}_H^G(\chi_V), \text{Ind}_H^G(\chi_V) \rangle_G = \langle \chi_V, \text{Res}_G^H \text{Ind}_H^G(\chi_V) \rangle_H \\ &= \sum_{[x] \in H \backslash G/H} \langle \chi_V, \text{Ind}_{H \cap xH}^H \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V) \rangle_H. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\sum_{[x] \in H \backslash G/H} \langle \chi_V, \text{Ind}_{H \cap xH}^H \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V) \rangle_H$  eine Summe positiver ganzer Zahlen. Ist  $x \in H$ , so ist  $H \cap xH = H$  und  $\text{Ind}_{H \cap xH}^H \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V) \cong V$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} &\sum_{[x] \in H \backslash G/H} \langle \chi_V, \text{Ind}_{H \cap xH}^H \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V) \rangle_H \\ &= \langle \chi_V, \chi_V \rangle_H + \sum_{[x] \in H \backslash G/H, x \notin H} \langle \chi_V, \text{Ind}_{H \cap xH}^H \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V) \rangle_H \\ &= \langle \chi_V, \chi_V \rangle_H + \sum_{[x] \in H \backslash G/H, x \notin H} \langle \chi_V, \text{Ind}_{H \cap xH}^H \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V) \rangle_H \\ &= \langle \chi_V, \chi_V \rangle_H + \sum_{[x] \in H \backslash G/H, x \notin H} \langle \text{Ind}_{H \cap xH}^H \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V), \chi_V \rangle_H \\ &= \langle \chi_V, \chi_V \rangle_H + \sum_{[x] \in H \backslash G/H, x \notin H} \langle \text{Res}_{xH}^{H \cap xH}(\chi^x_V), \text{Res}_H^{H \cap xH}(\chi_V) \rangle_{H \cap xH}. \end{aligned}$$

Aus  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_H \geq 1$  folgt die Aussage.  $\square$

Wir wollen zum Abschluss dieses Kapitels Mackey-Theorie benutzen um die einfachen Darstellungen der Diedergruppe zu klassifizieren.

**BEISPIEL 10.9.** Die Diedergruppe  $D_{2n} = \langle a, b \mid a^2 = e, b^n = e, aba = b^{n-1} \rangle$ , für  $n \in \mathbb{N}$ , ist ein semidirektes Produkt von  $H = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , sowie der normalen Untergruppe  $N = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Um die Isomorphieklassen einfacher komplexer Darstellungen von  $D_{2n}$  zu bestimmen, betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall.

**Eindimensionale Darstellungen von  $D_{2n}$ :** Jede eindimensionale Darstellung entspricht einem multiplikativen Charakter  $\chi: D_{2n} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Es muss  $\chi(a) = \pm 1$  gelten und  $\chi(b) = \zeta$  für  $\zeta$  eine  $n$ -te Einheitswurzel. Aus  $aba = b^{n-1}$  folgt  $\zeta = \chi(aba) = \chi(b^{n-1}) = \bar{\zeta}$  und damit  $\zeta = \pm 1$ . Wir erhalten somit zwei eindimensionale Darstellungen, die bestimmt sind durch die multiplikativen Charaktere

$$\chi_1, \chi_2: D_{2n} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \chi_1(a^k b^l) = 1, \quad \chi_2(a^k b^l) = (-1)^k.$$

Ist  $n$  gerade gibt es außerdem zwei weitere eindimensionale Darstellungen

$$\chi_3, \chi_4: D_{2n} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \chi_3(a^k b^l) = (-1)^l, \quad \chi_4(a^k b^l) = (-1)^{k+l}.$$

Jede eindimensionale Darstellung ist bis auf Isomorphie von dieser Form.

**Zweidimensionale Darstellungen:** Induzieren wir einfache Darstellungen von  $N$  nach  $D_{2n}$  sind diese per Konstruktion zweidimensional. Jeder Charakter einer einfachen Darstellung  $V$  von  $N$  ist gegeben durch  $\chi_V: N \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $\chi_\zeta(b^l) = \zeta^l$  für  $\zeta \in \mathbb{C}$  eine  $n$ -te

Einheitswurzel. Um zu bestimmen ob  $\text{Ind}_N^{D_{2n}}(\chi_\zeta)$  einfach ist, wollen wir Mackey's Irreduzibilitätskriterium verwenden. Jedes Element  $x \in D_{2n} \setminus N$  ist von der Form  $x = b^l a$  für  $1 \leq l \leq n$ . Es ist

$$\chi^{x_V}(b) = \chi_V(x^{-1} b x) = \chi_V(a b a) = \chi_V(b^{-1}) = \bar{\zeta}.$$

Da  ${}^x N = N$ , ist  $\text{Res}_{xN}^{N \cap xN}(\chi^{x_V}) = \chi^{x_V}$  und ebenso  $\text{Res}_{xN}^{N \cap xN}(\chi_V) = \chi_V$ . Wir haben

$$\langle \chi^{x_V}, \chi_V \rangle_N = \frac{1}{|N|} \sum_{l=1}^n \overline{\chi^{x_V}(b^l)} \chi_V(b^l) = \frac{1}{|N|} \sum_{l=1}^n \zeta^{2l} = \begin{cases} 0 & \zeta \neq \pm 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt,  $\text{Ind}_N^{D_{2n}}(\chi_V)$  ist genau dann einfach, wenn  $\chi_V(b) \neq \pm 1$ .

Um zu bestimmen welche einfachen Darstellungen von  $N$  verschiedene einfache Darstellungen von  $D_{2n}$  liefern betrachten wir zwei eindimensionale Darstellungen  $V, W$  von  $N$ . Es ist

$$\langle \text{Ind}_N^{D_{2n}}(\chi_V), \text{Ind}_N^{D_{2n}}(\chi_W) \rangle_{D_{2n}} = \langle \chi_V, \text{Res}_{D_{2n}}^N \text{Ind}_N^{D_{2n}}(\chi_W) \rangle_N = \langle \chi_V, \chi_W \rangle_N + \langle \chi_V, \chi_{aW} \rangle_N$$

genau dann 0, wenn  $\chi_V(b) \neq \chi_W(b)$  und  $\chi_V(b) \neq \overline{\chi_W(b)}$ . Damit gibt es für  $n$  ungerade genau  $\frac{n-1}{2}$  Isomorphieklassen einfacher zweidimensionaler Darstellungen von  $D_{2n}$ . Ist  $n$  gerade, so ist die Anzahl der Isomorphieklassen von einfachen Darstellungen von  $D_{2n}$  der Dimension 2 gleich  $\frac{n-2}{2}$ .

**Höherdimensionale Darstellungen:** Wir haben im ungeraden Fall die Identität  $2 \cdot 1^2 + \frac{n-1}{2} \cdot 2^2 = 2 + 2n - 2 = 2n$  und im geraden Fall  $4 \cdot 1^2 + \frac{n-2}{2} \cdot 2^2 = 4 + 2n - 4 = 2n$ . Somit sind alle einfachen Darstellungen bestimmt.

**ÜBUNG 10.4.** Geben Sie für jede Isomorphieklasse einfacher komplexer Darstellungen der Diedergruppe  $D_{2n} = \langle a, b \mid a^2 = e, b^n = e, a b a = b^{n-1} \rangle$  einen Vertreter explizit an.

**ÜBUNG 10.5.** Bestimmen Sie die Charaktertafel der alternierenden Gruppe  $A_5$ . Gehen Sie wie folgt vor:

- (i) Zeigen Sie, dass  $A_5$  genau 5 Konjugationsklassen hat.
- (ii) Begründen Sie, dass für  $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$  mit  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 60$  bis auf Permutation gilt  $a = 1, b = 3 = c, d = 4$  und  $e = 5$ .
- (iii) Zeigen Sie, dass die Standarddarstellung von  $S_5$  eine einfache Darstellung von  $A_5$  ist.
- (iv) Konstruieren Sie eine einfache 5-dimensionale Darstellung von  $A_5$  als Induktion einer eindimensionalen Darstellung von  $A_4$ .
- (v) Leiten Sie Charaktere der einfachen 3-dimensionalen Darstellungen aus den Orthogonalitätsrelationen her.

ÜBUNG 10.1. Die Gruppe  $S_n$  wirkt auf  $\{1, \dots, n\}$  mittels  $\sigma \triangleright j = \sigma(j)$  für alle  $\sigma \in S_n$  und  $1 \leq j \leq n$ . Bestimmen Sie die Untergruppe  $H = \text{Stab}_{S_n}(n)$  und die Kardinalität von  $H \backslash S_n / H$ .

Sei  $\Delta \subset \text{GL}_n(\mathbb{k})$  die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Bestimmen Sie  $|\Delta \backslash G / \Delta|$ .

ÜBUNG 10.2. Zeigen Sie, dass die  $\mathbb{k}[K] \otimes \mathbb{k}[H]^{\text{op}}$ -Wirkung auf  $\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}[K \cap sH]} \mathbb{k}[gH]$  aus Lemma 10.6 wohldefiniert ist.

ÜBUNG 10.3. Seien  $H, K \subset G$  zwei Untergruppen. Benutzen Sie Mackey's Formel um die Identität

$$\text{Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ind}_H^G(W) \cong \bigoplus_{[g] \in K \backslash G / H} \text{Ind}_{K \cap sH}^G(\text{Res}_K^{K \cap sH}(V) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Res}_{sH}^{K \cap sH}(W))$$

zu beweisen. Hinweis: Benutzen Sie, dass  $G$  eine Untergruppe von  $G \times G$  ist.

ÜBUNG 10.4. Geben Sie für jede Isomorphieklasse einfacher komplexer Darstellungen der Diedergruppe  $D_{2n} = \langle a, b \mid a^2 = e, b^n = e, aba = b^{n-1} \rangle$  einen Vertreter explizit an.

ÜBUNG 10.5. Bestimmen Sie die Charaktertafel der alternierenden Gruppe  $A_5$ . Gehen Sie wie folgt vor:

- (i) Zeigen Sie, dass  $A_5$  genau 5 Konjugationsklassen hat.
- (ii) Begründen Sie, dass für  $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$  mit  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 60$  bis auf Permutation gilt  $a = 1, b = 3 = c, d = 4$  und  $e = 5$ .
- (iii) Zeigen Sie, dass die Standarddarstellung von  $S_5$  eine einfache Darstellung von  $A_5$  ist.
- (iv) Konstruieren Sie eine einfache 5-dimensionale Darstellung von  $A_5$  als Induktion einer eindimensionalen Darstellung von  $A_4$ .
- (v) Leiten Sie Charaktere der einfachen 3-dimensionalen Darstellungen aus den Orthogonalitätsrelationen her.

## 11. Woche 11: Clifford-Theorie

There's a tiresome young man in Bay Shore. When his fiancée cried, 'I adore The beautiful sea', He replied, 'I agree, It's pretty, but what is it for?'

---

Morris Bishop; zitiert aus dem Buch "Abstract and concrete categories: the joy of cats" von Adámek, Herrlich, Strecker

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Den Satz von Clifford
- (ii) Trägheitsgruppen
- (iii) Induktion von Trägheitsgruppen
- (iv) Einfache Darstellungen semidirekter Produkte

In diesem Abschnitt wollen wir Mackey-Theorie verwenden um Darstellungen von Gruppen mittels normaler Untergruppen zu studieren. Die zentrale Motivation hierfür ist, dass für  $N \subset G$  normal jedes  $g \in G$  einen Automorphismus

$$\text{Ad}_g: N \longrightarrow {}^g N = N, \quad n \longmapsto gng^{-1}$$

definiert und damit für jede Darstellung  $W$  von  $N$  auch  ${}^g W$  eine Darstellung von  $N = {}^g N$  ist. Der Satz von Clifford benutzt diese Konjugationswirkung um die Struktur restringierter Darstellungen zu beschreiben.

**ÜBUNG 11.1.** Sei  $N \subset G$  eine normale Untergruppe  $g \in G$  und  $W$  eine Darstellung von  $N$ . Zeigen Sie dass die Isomorphieklassen der Unterdarstellungen von  $W$  und der Unterdarstellungen von  ${}^g W$  in Bijektion stehen. Folgern Sie daraus, dass  $W$  genau dann einfach ist, wenn  ${}^g W$  einfach ist.

**THEOREM 11.1 (Satz von Clifford).** Sei  $N \subset G$  eine normale Untergruppe und  $V$  eine einfache Darstellung von  $G$ . Dann ist

$$\text{Res}_G^N(V) \cong W_1^{a_1} \oplus \dots \oplus W_r^{a_r},$$

wobei  $r \leq |G/N|$  und  $W_1, \dots, W_r$  paarweise nicht-isomorphe einfache Darstellungen von  $N$  sind mit Multiplizitäten  $a_1, \dots, a_r$ . Außerdem gilt

- (i) Die Gruppe  $G$  wirkt transitiv auf den homogenen Komponenten. Das bedeutet, für jedes  $1 \leq i, j \leq r$  gibt es ein  $g \in G$ , sodass  $\rho_V(g)(W_i^{a_i}) = W_j^{a_j}$ .
- (ii) Es gilt  $a_1 = \dots = a_r$  und  $\dim W_1 = \dots = \dim W_r$ .
- (iii) Wir haben  $V \cong \text{Ind}_H^G(W_1^{a_1})$ , wobei  $H = \{g \in G \mid \rho_V(g)W_1^{a_1} \subseteq W_1^{a_1}\}$ .

**BEWEIS.** Wir fixieren eine einfache Unterdarstellung  $W_1 \subset V$  von  $N$ . Für jedes  $g \in G$  ist auch  $gW_1 \stackrel{\text{def}}{=} \rho_V(g)(W_1)$  eine Darstellung von  $N$ , da

$$p_V(n)(p_V(g)w) = p_V(ng)w = p_V(gg^{-1}ng)w = p_V(g)(p_V(g^{-1}ng)w)$$

Diese ist einfach, da für jede Unterdarstellung  $gW_1' \subsetneq gW_1$  auch  $g^{-1}gW_1' \subsetneq g^{-1}gW_1 = W_1$  ist und damit  $gW_1' = \{0\}$  folgt.

Jeder Vektor  $0 \neq w \in W_1$  erzeugt  $V$  als Darstellung von  $G$ . Aus der Partitionierung  $G = Ng_1 \sqcup Ng_2 \sqcup \dots \sqcup Ng_l$  für  $l = |G/N|$  folgt, dass  $\text{Res}_G^N(V)$  als Darstellung von  $N$  aufgespannt wird von  $\{\rho_V(g_1)w, \dots, \rho_V(g_l)w\}$ . Insbesondere ist  $\text{Res}_G^N(V) \cong \sum_{i=1}^l \rho_V(g_i)W_1$

und wir erhalten eine Zerlegung  $\text{Res}_G^N(V) \cong W_1^{a_1} \oplus \dots \oplus W_r^{a_r}$ , wobei  $r \leq |G/N|$  und  $W_1, \dots, W_r$  paarweise nicht-isomorphe einfache Darstellungen von  $N$  sind.

Zu (i) und (ii): Die Aussage folgt direkt aus dem vorherigen Argumenten. Genauer gesagt gibt es für jedes  $1 \leq j \leq r$  ein  $g \in G$ , sodass  $W_j \cong g W_1$  und damit  $g W_1^{a_1} \subseteq W_j^{a_j}$ . Aus  $g^{-1} W_j^{a_j} \subseteq W_1^{a_1}$  folgt  $W_j^{a_j} = g W_1^{a_1}$ . Damit erhalten wir, dass  $G$  transitiv auf den homogenen Komponenten wirkt,  $\dim W_j = \dim W_1$  und  $a_j = a_1$ .

Zu (iii): Sei  $H = \{g \in G \mid \rho_V(g)(W_1^{a_1}) \subseteq W_1^{a_1}\}$  die Stabilisatorgruppe von  $W_1^{a_1}$  bezüglich der Wirkung von  $G$  auf den homogenen Komponenten der Zerlegung  $\text{Res}_G^N(V)$ . Per Definition ist  $W_1^{a_1}$  eine Darstellung von  $H$  und wir setzen

$$\phi: \text{Ind}_H^G(W_1^{a_1}) \longrightarrow V \quad g \otimes_{\mathbb{k}[H]} w \longmapsto \rho_V(g)w.$$

Die Wohldefiniertheit und  $G$ -Äquivarianz folgen aus der Beobachtung, dass

$$\begin{aligned} \phi(gh \otimes_{\mathbb{k}[H]} w) &= \rho_V(gh)w = \phi(g \otimes_{\mathbb{k}[H]} \rho_V(h)w) \\ \phi(\rho_{\text{Ind}}(g')(g \otimes_{\mathbb{k}[H]} w)) &= \rho_V(g'g)w = \rho_V(g')(\phi(g \otimes_{\mathbb{k}[H]} w)) \end{aligned}$$

für alle  $g, g' \in G, h \in H$  und  $w \in W_1^{a_1}$ .

Sei nun  $g_1, \dots, g_r$  eine vollständige Menge an Repräsentanten der Nebenklassen  $G/H$ . Nach Konstruktion von  $H$  gibt es eine Vektorraumzerlegung von  $V$  als direkte Summe  $V = \bigoplus_{i=1}^r W_i^{a_i} = \bigoplus_{i=1}^r \rho_V(g_i)W_1^{a_1}$ . Ebenso haben wir  $\text{Ind}_H^G(W_1^{a_1}) \cong \bigoplus_{i=1}^r (W_1^{a_1})_{g_i}$ , mit  $(W_1^{a_1})_{g_i} = \{g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} w \mid w \in W_1^{a_1}\}$  für alle  $1 \leq i \leq r$ . Aus  $\phi(g_i \otimes_{\mathbb{k}[H]} w) = \rho_V(g_i)w \in g W_1^{a_1}$  für alle  $1 \leq i \leq r$  und  $w \in W_1^{a_1}$  folgt die Bijektivität von  $\phi$ . □

Wir wollen den Satz von Clifford hauptsächlich dazu verwenden um zu analysieren, wann sich einfache Darstellungen von normalen Untergruppen zu einfachen Darstellungen der ganzen Gruppe fortsetzen lassen.

**DEFINITION 11.2.** Gegeben einer normalen Untergruppe  $N \subset G$  und einer Darstellung  $V$  von  $N$ , nennt man  $G_V \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid {}^g V \cong V\}$  die *Trägheitsgruppe* von  $V$ .

**ÜBUNG 11.2.** Zeigen Sie, dass für jede normale Untergruppe  $N \subset G$  und jede Darstellung  $V$  von  $N$  gilt  $N \subset G_V$ .

Wir schreiben  $\text{Irr}(G, V)$  für die Menge an Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von  $G$ , die aufgefasst als Darstellung von  $N$  mindestens eine Kopie von  $V$  enthalten. Das bedeutet, ist  $[W] \in \text{Irr}(G, V)$ , so gilt  $W$  ist einfach und  $[V : \text{Res}_G^N(W)] \geq 1$ .

**LEMMA 11.3.** Sei  $N \subset G$  normal und  $V$  eine irreduzible Darstellung von  $N$ . Dann ist

$$\text{Irr}(G_V, V) \longrightarrow \text{Irr}(G, V), \quad [U] \longmapsto [\text{Ind}_{G_V}^G(U)]$$

eine Bijektion.

**BEWEIS.** Sei  $U$  eine einfache Darstellung von  $G_V$  mit  $[V : \text{Res}_{G_V}^N(U)] \geq 1$ . Wir zeigen zunächst, dass  $W = \text{Ind}_{G_V}^G(U)$  einfach ist und  $[V : \text{Res}_G^N(W)] \geq 1$ . Anwenden der Mackey-Formel und liefert eine Vektorraumzerlegung

$$W \cong \text{Res}_G^N \text{Ind}_{G_V}^G(U) \cong \bigoplus_{[x] \in G/G_V} \text{Ind}_{N \cap {}^x G_V}^N \text{Res}_{{}^x G_V}^{N \cap {}^x G_V}({}^x U) \cong \bigoplus_{[x] \in G/G_V} \text{Res}_{{}^x G_V}^N({}^x U).$$

Betrachten wir einen Untermodul  $W' \subseteq W$ . Nach Definition von  $G_V$  und dem Satz von Clifford gibt es eine natürliche Zahl  $a \in \mathbb{N}$ , sodass  $\text{Res}_{{}^x G_V}^N({}^x U) \cong ({}^x V)^a$  für alle Nebenklassen  $[x] \in G/G_V$ . Folglich erhalten wir  $W' \cong \text{Res}_G^N(W') \cong \bigoplus_{[x] \in G/G_V} U'_{[x]}$ , wobei

$U'_{[x]} \subseteq {}^x U$  für alle  $[x] \in G/G_V$ . Die Wirkung der Gruppe  $G_V \subset G$  auf  $\bigoplus_{[x] \in G/G_V} U'_{[x]}$  fixiert den Summanden  $U'_{[e]} \subset U$ . Da  $U$  aber als Darstellung von  $G_V$  einfach ist, muss  $U'_{[e]} = \{0\}$  oder  $U'_{[e]} = \{V\}$  gelten. Weiterhin ist  $U'_{[y]} \cong \rho_W(y)(U'_{[e]})$  für jedes  $[y] \in G/G_V$ . Somit muss  $W'$  entweder trivial oder gleich  $W$  sein.

Sei  $T$  eine weitere einfache Darstellung von  $G_V$ , sodass  $\text{Ind}_{G_V}^G(T) \cong \text{Ind}_{G_V}^G(U)$ . Die vorangegangenen Rechnungen zeigen, dass wir einen Isomorphismus von graduierten Vektorräumen erhalten  $\bigoplus_{[x] \in G/G_V} \text{Res}_{xG_V}^N({}^x T) \cong \bigoplus_{[x] \in G/G_V} \text{Res}_{xG_V}^N({}^x U)$  und somit  $T \cong U$ .

Um Surjektivität zu zeigen nehmen wir an  $R$  sei eine einfache Darstellung von  $G$  und  $[V : R] \geq 1$ . Gemäß dem Satz von Clifford und der Definition der Gruppe  $G_V$  ist  $R \cong \text{Ind}_{G_V}^G(V^a)$  für  $a \in \mathbb{N}$ . Da  $R$  einfach ist, wird es von jedem Vektor  $0 \neq v \in V^a$  erzeugt. Die Einschränkung auf  $G_V$ , liefert dass auch  $V^a$  als Darstellung von  $G_V$  von  $v$  erzeugt wird. Damit folgt  $V^a$  ist einfach.  $\square$

Wir wollen den Satz von Clifford hauptsächlich auf semidirekte Produkte anwenden.

WIEDERHOLUNG. Nehmen wir an, die Gruppe  $G$  habe zwei Untergruppen  $N$  und  $H$ , wobei  $N$  normal ist. Lässt sich jedes Element von  $G$  eindeutig als Produkt von Elementen aus  $N$  und  $H$  schreiben, das heißt  $N \cap H = \{e\}$  und  $NH = G$ , sprechen wir von einem *semidirekten Produkt*. Wie zuvor schreiben wir  $c_h(n) = hnh^{-1}$ . Betrachten wir die Bijektion

$$N \times H \longrightarrow G, (n, h) \longmapsto (nh).$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass sie ein Gruppenisomorphismus wird, wenn wir die Menge  $N \times H$  mit der Multiplikation

$$(n, h)(n', h') = (nc_h(n'), hh')$$

ausstatten. Wir schreiben für diese Gruppe  $N \rtimes H$ .

Um die Theorie kompakt zu halten wollen wir uns auf den Fall beschränken, dass die normale Untergruppe abelsch ist. Das folgende Lemma klassifiziert in diesem Setting die einfachen Darstellungen des semidirekten Produkts mittels eindimensionaler Darstellungen der abelschen normalen Untergruppe und einfachen Darstellung der korrespondierenden Trägheitsgruppe.

KOROLLAR 11.4. Sei  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen,  $G = A \rtimes H$  ein semidirektes Produkt,  $A$  abelsch und  $U$  eine einfache Darstellung von  $A$ .

- (i) Die Trägheitsgruppe von  $U$  ist ein semidirektes Produkt  $A \rtimes \tilde{H}$ .
- (ii) Es bezeichne  $\text{Irr}(\tilde{H})$  die Menge der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von  $\tilde{H}$ . Es gibt eine Bijektion

$$\text{Irr}(\tilde{H}) \longrightarrow \text{Irr}(G, U), \quad [V] \longmapsto [\text{Ind}_{A \rtimes \tilde{H}}^G(U \otimes V)],$$

wobei die Wirkung von  $A \rtimes \tilde{H}$  auf  $U \otimes V$  durch  $\rho(a, h)(u \otimes v) = \rho_U(a)u \otimes \rho_V(h)v$  gegeben ist.

BEWEIS.

Zu (i): Die Aussage folgt aus einer direkten Rechnung, siehe Übung 11.3.

Zu (ii): Lemma 11.3 zeigt, dass durch  $W \longmapsto \text{Ind}_{A \rtimes \tilde{H}}^G(W)$  eine Identifikation zwischen  $\text{Irr}(A \rtimes \tilde{H}, U)$  und  $\text{Irr}(G, U)$  gegeben ist. Wir zeigen nun, dass

$$f: \text{Irr}(\tilde{H}) \longrightarrow \text{Irr}(A \rtimes \tilde{H}, U), \quad [V] \longmapsto [U \otimes V]$$

eine wohldefinierte Bijektion ist. Da  $U$  einfach und  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $\dim U = 1$  und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen  $U = \mathbb{k}$  als Vektorraum.

Per Definition ist  $\tilde{H} = \{h \in H \mid U \cong {}^h U\}$ . Wegen Schur's Lemma gibt es für jedes  $h \in H$  eine Zahl  $\lambda_h \neq 0$  mit  $\lambda_h \rho_U(a) = \lambda_h \rho_U(h^{-1}ah)$ . Insbesondere ist  $\rho_U(hah^{-1}) = \rho_U(a)$  für alle  $a \in A$  und  $h \in \tilde{H}$ . Somit ist für jede Darstellung  $V$  von  $\tilde{H}$  die Wirkung auf  $U \otimes V$  wohldefiniert, da

$$\rho(a, h)(\rho(a', h')(u \otimes v)) = \rho(a, h)(\rho(ha'h^{-1}, h')(u \otimes v)) = \rho(a, hah^{-1}, hh')(u \otimes v).$$

Weiterhin ist  $U \otimes V$  genau dann einfach, wenn  $V$  einfach ist. Es folgt die Wohldefiniertheit und Injektivität von  $f$ . Nehmen wir nun an  $W$  sei eine einfache  $A \rtimes \tilde{H}$ -Darstellung. Die Zuordnung  $u \otimes w \mapsto uw$  definiert einen  $A \rtimes \tilde{H}$ -äquivalenten Isomorphismus  $U \otimes \text{Res}_{A \rtimes \tilde{H}}^{\tilde{H}} W \rightarrow W$ . Somit ist  $f$  auch surjektiv. □

ÜBUNG 11.3. Zeigen Sie, jede Untergruppe eines semidirekten Produkts ist ein semidirektes Produkt. Folgern Sie daraus, den Beweis des ersten Punktes von Korollars 11.4.

ÜBUNG 11.4. Es sei  $B = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . Wir schreiben  $[x]_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  für das eindeutige Gruppenelement, dessen Eintrag an der  $i$ -ten Stelle  $[x]$  ist und ansonsten konstant  $[0]$ . Die Gruppe  $S_3$  wirkt durch Automorphismen auf  $B$  via

$$\phi: S_3 \rightarrow \text{Aut}(B), \quad \sigma([x]_i) = x_{\sigma(i)}.$$

- (i) Bestimmen Sie die Charaktertafel der Gruppe  $B \rtimes_{\phi} S_3$ .
- (ii) Betrachten Sie den Gruppenhomomorphismus  $f: B \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  der bestimmt ist durch  $f([1]_i) = 1$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Wir bezeichnen mit  $D$  den Kern von  $f$ . Beweisen Sie, dass  $\phi(\sigma)d \in D$  für alle  $\sigma \in S_3$  und  $d \in D$  und folgern Sie daraus, dass  $D \rtimes_{\phi} S_3$  wohldefiniert ist.
- (iii) Berechnen Sie die Charaktertafel von  $D \rtimes_{\phi} S_3$

BEMERKUNG 11.5. Korollar 11.4 liefert uns einen Algorithmus um die einfachen Darstellungen eines semidirekten Produkts  $G = A \rtimes H$ , dessen Normalteiler abelsch ist, über algebraisch abgeschlossenen Körpern zu bestimmen. Um ihn anzugeben stellen wir folgende Beobachtung auf, die aus dem Satz von Clifford folgt. Die Gruppe  $G$ , und damit auch  $H \subset G$  wirkt auf den Mengen der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von  $A$ :

$$\triangleright: H \times \text{Irr}(A) \rightarrow \text{Irr}(A), \quad h \triangleright [(V, \rho)] = [(V, \rho \circ c_h)]$$

Weiterhin gilt für eine einfache Darstellung  $V$  von  $A$  mit Trägheitsgruppe  $G_V = A \rtimes \tilde{H}$  und  $[W] \in \text{Irr}(G, V)$ , dass eine natürliche Zahl  $a \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$\text{Res}_G^A(W) \cong \bigoplus_{[x] \in G/G_V} ({}^x V)^a \cong \bigoplus_{[x] \in H/\tilde{H}} ({}^x V)^a.$$

Für jedes  $[x] \in H/\tilde{H}$  ist

$$\{h \in H \mid \rho_{xV} \circ \text{Ad}_h = \rho_{xV}\} = \{h \in H \mid \rho_V \circ \text{Ad}_{hx} = \rho \circ \text{Ad}_x\} = {}^x \tilde{H}$$

und  $W \cong \text{Ind}_{G_V}^G ({}^x V)^a \cong \text{Ind}_{A \rtimes \tilde{H}}^{A \rtimes H} V$ . Die Folge ist, dass die Trägheitsgruppen von  $V$  und  ${}^x V$  isomorph sind. Das Verfahren aus Korollar 11.4 liefert deshalb für die einfachen Darstellungen von  $H$  und  $\tilde{H}$  isomorphe einfache Darstellungen von  $G$ ; wir müssen also  $V$  sowie  ${}^x V$  und die zugehörigen Trägheitsgruppen nicht gesondert betrachten. Es ergibt sich der Algorithmus:

- (i) Bestimme die Isomorphieklassen einfachen Darstellungen von  $A$ .
- (ii) Berechne die Bahnen  $H \triangleright [V]$ , für  $[V] \in \text{Irr}(A)$ .
- (iii) Sei  $V_1, \dots, V_n$  eine vollständige Familie an Repräsentanten der Bahnen. Bestimme für jedes  $1 \leq i \leq n$  die Gruppe  $H_{V_i} \stackrel{\text{def}}{=} H \cap G_{V_i}$ , wobei  $G_{V_i}$  die Trägheitsgruppe von  $V_i$  ist. Es gilt  $G_{V_i} = A \rtimes H_{V_i}$ .
- (iv) Errechne für alle  $1 \leq i \leq n$  die Menge der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von  $H_{V_i}$ .
- (v) Sei  $U_{i,1}, \dots, U_{i,m_i}$  die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von  $H_{V_i}$ , wobei  $1 \leq i \leq n$ . Es gibt eine Bijektion

$$\text{Irr}(G) \cong \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^{m_i} [\text{Ind}_{A \rtimes H_{V_i}} V_i \otimes U_{i,j}] = \sqcup_{i=1}^n \sqcup_{j=1}^{m_i} [\text{Ind}_{A \rtimes H_{V_i}} V_i \otimes U_{i,j}].$$

Für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m_i$  ist die Dimension von  $\text{Ind}_{A \rtimes H_{V_i}} V_i \otimes U_{i,j}$  gleich  $|H/H_i| \dim U_{i,j}$ . Falls  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  kann der Charakter der einfachen Darstellung  $\text{Ind}_{A \rtimes H_{V_i}} V_i \otimes U_{i,j}$  mittels der Frobenius-Formel aus Lemma 10.1 berechnet werden.

ÜBUNG 11.1. Sei  $N \subset G$  eine normale Untergruppe  $g \in G$  und  $W$  eine Darstellung von  $N$ . Zeigen Sie dass die Isomorphieklassen der Unterdarstellungen von  $W$  und der Unterdarstellungen von  ${}^g W$  in Bijektion stehen. Folgern Sie daraus, dass  $W$  genau dann einfach ist, wenn  ${}^g W$  einfach ist.

ÜBUNG 11.2. Zeigen Sie, dass für jede normale Untergruppe  $N \subset G$  und jede Darstellung  $V$  von  $N$  gilt  $N \subset G_V$ .

ÜBUNG 11.3. Zeigen Sie, jede Untergruppe eines semidirekten Produkts ist ein semidirektes Produkt. Folgern Sie daraus, den Beweis des ersten Punktes von Korollars 11.4.

ÜBUNG 11.4. Es sei  $B = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . Wir schreiben  $[x]_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  für das eindeutige Gruppenelement, dessen Eintrag an der  $i$ -ten Stelle  $[x]$  ist und ansonsten konstant  $[0]$ . Die Gruppe  $S_3$  wirkt durch Automorphismen auf  $B$  via

$$\phi: S_3 \longrightarrow \text{Aut}(B), \quad \sigma([x]_i) = x_{\sigma(i)}.$$

- (i) Bestimmen Sie die Charaktertafel der Gruppe  $B \rtimes_{\phi} S_3$ .
- (ii) Betrachten Sie den Gruppenhomomorphismus  $f: B \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  der bestimmt ist durch  $f([1]_i) = 1$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Wir bezeichnen mit  $D$  den Kern von  $f$ . Beweisen Sie, dass  $\phi(\sigma)d \in D$  für alle  $\sigma \in S_3$  und  $d \in D$  und folgern Sie daraus, dass  $D \rtimes_{\phi} S_3$  wohldefiniert ist.
- (iii) Berechnen Sie die Charaktertafel von  $D \rtimes_{\phi} S_3$

## 12. Woche 12: Coxeter-Gruppen

Coxeter came to Cambridge and he gave a lecture, then he had this problem (...) and he asked for a unified proof. I left the lecture room thinking. As I was walking through Cambridge, suddenly the idea hit me, but it hit me while I was in the middle of the road. When the idea hit me I stopped and a large truck ran into me and bruised me considerably (...). So I pretended that Coxeter had calculated the difficulty of this problem so precisely that he knew that I would get the solution just in the middle of the road. (...) Ever since, I've called that theorem the "murder weapon".

---

John Conway – Interview im  
Mathematical Intelligencer 2001

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Coxeter-Gruppen
- (ii) Die geometrische Standarddarstellung
- (iii) Die Klassifikation endlicher Coxeter-Gruppen
- (iv) Coxeter-Gruppen der Typen  $A, B, D$  und  $I$  und ihre Darstellungstheorie.

Wir wollen in den nächsten zwei Abschnitten die Resultate der letzten Wochen auf bestimmte Spiegelungsgruppen anwenden, die zum Beispiel in der Lie-Theorie eine zentrale Rolle, da sie die Symmetrien von Wurzelsystemen beschreiben und damit zentrale Informationen über (halbeinfache) Lie-Algebren kodieren.

**DEFINITION 12.1.** Sei  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  eine Menge der Kardinalität  $n$ . Eine Matrix  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$  heißt *Coxeter-Matrix*, falls für alle  $1 \leq i, j \leq n$  gilt  $m_{ij} = m_{ji}$  und  $m_{ij} = 1$  genau dann, wenn  $i = j$ .

Der *Coxeter-Graph* des Paares  $(S, M)$  ist ein ungerichteter (gewichteter) Graph mit  $S$  als Eckenmenge und genau dann eine Kante mit Gewichtung  $m_{ij}$  zwischen  $s_i$  und  $s_j$ , wenn  $m_{ij} \geq 3$ .

Der besseren Lesbarkeit halber werden in Coxeter-Graphen Kanten mit Gewichtung 3 als ungewichtete Kanten eingezeichnet.

Uns werden die folgenden vier Coxeter-Matrizen und Graphen immer wieder begegnen.

**BEISPIEL 12.2.** Nehmen wir zunächst an  $S = \{s_1, s_2\}$  und  $k \geq 4$  sei eine natürliche Zahl. Die  $2 \times 2$ -Coxeter-Matrix mit  $k$  als Eintrag außerhalb der Diagonale und ihr Graph sind

$$I_2(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 \text{ --- } k \text{ --- } s_2$$

Die Coxeter-Matrix zu  $I_2(3)$  wird uns unter anderem Namen begegnen; der Coxeter-Graph der  $2 \times 2$ -Matrix  $I_2(2)$  mit Einsen auf der Diagonale und Zweien auf der Nebendiagonale ist nicht zusammenhängend. Er besteht aus zwei Punkten und keinen Kanten.

Für  $n \geq 2$  sei  $S_{(n)} = \{s_1, \dots, s_n\}$ . Wir betrachten die drei Beispiele

$$\begin{aligned}
 A_n &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \cdots & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{N}}(n) & \quad s_1 \text{ --- } s_2 \text{ --- } s_3 \text{ - - - - } s_{n-1} \text{ --- } s_n \\
 B_{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & 1 & 3 & 2 \\ \vdots & \ddots & 3 & 1 & 4 \\ 2 & \cdots & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{N}}(n+1) & \quad s_1 \text{ --- } s_2 \text{ --- } s_3 \text{ - - - - } s_n \xrightarrow{4} s_{n+1} \\
 D_{n+2} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & 1 & 3 & 3 \\ \vdots & \ddots & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{N}}(n+2) & \quad s_1 \text{ --- } s_2 \text{ - - - - } s_n \begin{matrix} \nearrow s_{n+1} \\ \searrow s_{n+2} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Endliche Coxeter-Matrizen codifizieren die Relationen einer endlich präsentierten Gruppe.

DEFINITION 12.3. Man nennt eine Gruppe  $W$  eine *Coxeter-Gruppe*, wenn es eine Menge  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  und eine Coxeter-Matrix  $M$  gibt, sodass

$$(12.1) \quad W \cong \langle s_1, \dots, s_n \mid \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n \text{ gilt } (s_i s_j)^{m_{ij}} = e \text{ falls } m_{ij} < \infty \rangle.$$

Das Paar  $(W, S)$  heißt ein Coxeter-System.

ÜBUNG 12.1. Sei  $W$  eine Gruppe und  $s, t \in W$  Elemente der Ordnung 2. Beweisen Sie, dass aus  $(st)^n = e$  auch  $(ts)^n = e$  folgt.

ÜBUNG 12.2. Zeigen Sie, dass  $\langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^4 = abc = e \rangle \cong W(A_3)$ .

In der Klassifikation endlicher Coxeter-Gruppen spielen die Matrizen  $(I_2(k))_{k \geq 2}$ ,  $(A_n)_{n \geq 2}$ ,  $(B_n)_{n \geq 3}$  und  $(D_n)_{n \geq 4}$  aus Beispiel 12.2 eine zentrale Rolle.

KONVENTION 12.4. Für natürliche Zahlen  $n, k \geq 2$  verwenden wir die suggestive Schreibweise

- (i)  $W(I_2(k))$  für das Coxeter-System definiert auf der zweielementigen Menge  $\{s_1, s_2\}$  und der Coxeter-Matrix  $I_2(k)$ ,
- (ii)  $W(A_n)$  für das Coxeter-System mit zugrundeliegender Menge  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  und Coxeter-Matrix  $A_n \in \text{Mat}_{\mathbb{N}}(n)$ ,
- (iii)  $W(B_{n+1})$  für das Coxeter-System mit  $S = \{s_1, \dots, s_{n+1}\}$  als zugrundeliegender Menge und Coxeter-Matrix  $B_{n+1} \in \text{Mat}_{\mathbb{N}}(n+1)$ ,
- (iv)  $W(D_{n+2})$  für das Coxeter-System mit  $S = \{s_1, \dots, s_{n+2}\}$  sowie  $D_{n+2} \in \text{Mat}_{\mathbb{N}}(n+2)$  als Coxeter-Matrix.

Wir kennen bereits eine Familie an Beispielen für Coxeter-Gruppen in Form von Diedergruppen.

LEMMA 12.5. Für jedes  $k \geq 2$  ist zwischen der Coxeter-Gruppe  $W(I_2(k))$  und der Diedergruppe  $D_{2k} = \langle a, b \mid a^2 = e, b^k = e, aba = b^{k-1} \rangle$  durch die Zuordnung  $s_1 \mapsto a$  und  $s_2 \mapsto ab$  ein Isomorphismus von Gruppen bestimmt.

ÜBUNG 12.3. Beweisen Sie Lemma 12.5.

Diedergruppen beschreiben die durch Spiegelungen gebildeten Symmetrien eines regelmäßigen  $k$ -Ecks. Diese "geometrische Darstellung" lässt sich auf allgemeine Coxeter-Gruppen erweitern.

DEFINITION 12.6. Sei  $(W, S)$  ein Coxeter-System mit zugehöriger Coxeter-Matrix  $(m_{st})_{s,t \in S} \in \text{Mat}_n(\mathbb{N} \cup \infty)$  und  $V$  ein reeller Vektorraum mit Basis  $(e_s)_{s \in S}$ . Auf  $V$  sei die symmetrische Bilinearform  $(-, -): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$(e_s, e_t) = \begin{cases} -\cos \frac{\pi}{m_{st}} & m_{st} < \infty \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die geometrische Standarddarstellung  $(V, \rho_{\text{std}})$  von  $W$  ist definiert durch

$$\rho_{\text{std}}(s)v = v - 2(v, e_s)e_s \text{ für alle } s \in S.$$

LEMMA 12.7. Die geometrische Standarddarstellung eines Coxeter-Systems  $(W, S)$  ist wohldefiniert.

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass die Darstellung den Relationen von  $(W, S)$  genügt. Sei  $F(S)$  die von  $S$  erzeugte freie Gruppe. Für jedes  $s \in S$  ergibt sich aus  $\cos(\pi) = -1$  die Identität

$$(\rho_{\text{std}}(s))^2 v = \rho_{\text{std}}(v - 2(v, e_s)e_s) = v - 4(v, e_s)e_s + 4(v, e_s)(e_s, e_s)e_s = v \quad \text{für alle } v \in V.$$

Daraus folgt  $\rho_{\text{std}}(s)$  ist ein Automorphismus von  $V$  der Ordnung Zwei. Aufgrund der universellen Eigenschaft der freien Gruppe gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus  $\tilde{\rho}_{\text{std}}: F(S) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$  mit  $\tilde{\rho}_{\text{std}}(s) = \rho_{\text{std}}(s)$ .

Da  $\tilde{\rho}_{\text{std}}(s^2) = (\tilde{\rho}_{\text{std}}(s))^2 = \rho_{\text{std}}(s)^2 = \text{id}_V$  für alle  $s \in S$ , verbleibt es zu zeigen, dass für  $s \neq t \in S$  und zugehörigem Eintrag  $m_{st} \in \mathbb{N}$  der Coxeter-Matrix aus  $m_{st} \leq \infty$  auch  $\tilde{\rho}_{\text{std}}(st)^{m_{st}} = \text{id}_V$  folgt. Eingeschränkt auf den Unterraum  $V' = \text{span}_{\mathbb{R}}(e_s, e_t)$  ist die Bilinearform parametrisiert durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} (e_s, e_s) & (e_s, e_t) \\ (e_t, e_s) & (e_t, e_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \pi/m_{st} \\ -\cos \pi/m_{st} & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese ist positiv definit und die Bilinearform auf  $V'$  demnach nicht ausgeartet. Wir können folglich  $V$  als Vektorraum zerlegen in  $V = (e_s^\perp \cap e_t^\perp) \oplus \text{span}_{\mathbb{R}}(e_s, e_t)$ . Für  $w \in e_s^\perp \cap e_t^\perp$  ist

$$\tilde{\rho}_{\text{std}}(st)w = \tilde{\rho}_{\text{std}}(s)(\tilde{\rho}_{\text{std}}(t)w) = \tilde{\rho}_{\text{std}}(s)w = w.$$

Sowohl  $s$  als auch  $t$  wirken auf  $V'$  durch Spiegelungen durch die zu  $e_s$  beziehungsweise  $e_t$  orthogonalen Geraden. Damit wirkt  $st$  durch eine Rotation um einen Winkel  $\theta$ . Um diesen zu bestimmen berechnen wir

$$\tilde{\rho}_{\text{std}}(st)e_t = \tilde{\rho}_{\text{std}}(s)(-e_t) = -e_t - 2 \cos \frac{\pi}{m_{st}} e_s.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= (e_t, -e_t - 2 \cos \frac{\pi}{m_{st}} e_s) = -1 + 2 \left( \cos \frac{\pi}{m_{st}} \right)^2 \\ &= \left( \cos \frac{\pi}{m_{st}} \right)^2 - \left( \sin \frac{\pi}{m_{st}} \right)^2 = \cos\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right) \end{aligned}$$

und somit  $\rho_{\text{std}}(\tilde{st})^{m_{st}}v' = v'$  für alle  $v' \in V'$ . □

**ÜBUNG 12.4.** Für ein Coxeter-System  $(W, S)$  mit geometrischer Standarddarstellung  $V_{\text{std}}$  definieren wir die Menge  $\Delta = \{\rho_{\text{std}}(w)e_s \mid w \in W, s \in S\}$ . Man kann zeigen, dass  $\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ , wobei  $\Delta^+ = \{r \in \Delta \mid r = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s, \lambda_s \geq 0 \text{ für alle } s \in S\}$ . Außerdem gilt für alle  $s \in S$ , dass  $\rho_{\text{std}}(s)(\Delta^+ \setminus e_s) = \Delta^+ \setminus e_s$ .

Die Länge der Elemente von  $W$  ist bestimmt durch die Abbildung

$$l: W \longrightarrow \mathbb{N}, \quad l(w) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S : w = s_n \dots s_1\}.$$

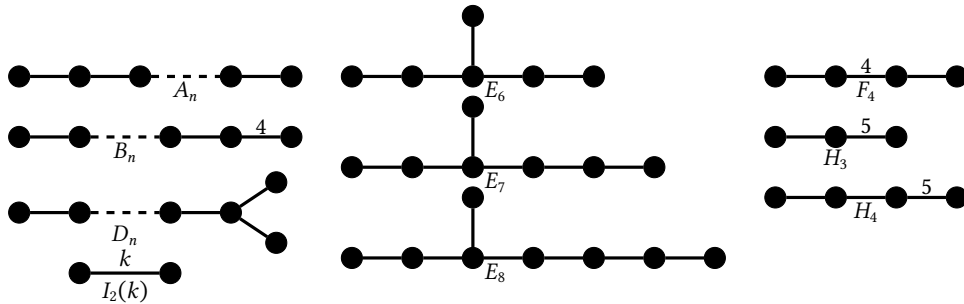
Für  $w \in W$  schreiben wir  $S(w) = \{r \in \Delta^+ \mid \rho_{\text{std}}(w)r \in -\Delta^+\}$ . Beweisen Sie  $l(w) = |S(w)|$ .

Hinweis: Zeigen Sie, dass für  $w = s_{i_{l(w)}} \dots s_{i_1}$  gilt  $S(w) = \{s_{i_k} \dots s_{i_1}(e_{s_i}) \mid 1 \leq k \leq n\}$ .

Mittels der geometrischen Standarddarstellung lassen sich alle endlichen Coxeter-Gruppen klassifizieren. Ein Beweis wird unter anderem in [Hum90] diskutiert. Wir werden die folgenden zwei Resultate benutzen ohne ihre Beweise zu diskutieren.

**LEMMA 12.8.** Sei  $(W, S)$  das Coxeter-System einer endlichen Coxeter-Gruppe. Die Wirkung  $\rho_{\text{std}}: W \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$  der geometrischen Standarddarstellung  $(V, \rho_{\text{std}})$  ist injektiv.

**THEOREM 12.9.** Für jede endliche Coxeter-Gruppe  $W$  gibt es eine endliche, möglicherweise leere, Familie  $(W_i, S_i)_{1 \leq i \leq n}$  an Coxeter-Systemen, sodass  $W \cong \times_{i=1}^n W_i$  und für jedes  $1 \leq i \leq n$  der Coxeter-Graph von  $(W_i, S_i)$  in der folgenden Liste enthalten ist:



**ÜBUNG 12.5.** Beweisen Sie, dass es zwei Coxeter-Systeme  $(W, S)$  und  $(W', S')$  gibt, sodass  $|S| \neq |S'|$  aber  $W \cong D_{12} \cong W'$ .

Wir haben bereits gesehen, dass Coxeter-Gruppen vom Typ  $I_2(k)$  isomorph zu Diedergruppen sind. Unser Ziel ist nun die Gruppenstrukturen von Gruppen der Typen  $A_n$ ,  $B_n$  und  $D_n$  zu analysieren. Für  $1 \leq i \leq n$  schreiben wir  $\sigma_i = (i \ i + 1) \in S_{n+1}$ .

**LEMMA 12.10.** Für jedes  $n \geq 2$  gibt es einen Gruppenisomorphismus

$$f: W(A_n) \longrightarrow S_{n+1}, \quad s_i \longmapsto \sigma_i.$$

**BEWEIS.** Wir betrachten die direkte Summe  $U = V_{\text{std}} \oplus \mathbb{R}_{\text{triv}}$  der geometrischen Standarddarstellung von  $W(A_n)$  und der trivialen Darstellung von  $W(A_n)$ . Dieser liegt

ein  $n + 1$ -dimensionaler Vektorraum  $U$  mit Basis  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$  zugrunde. Die Wirkung ist für alle  $1 \leq i \leq n$  definiert durch  $\rho(s_i)e_{n+1} = e_{n+1}$  und

$$\rho(s_i)e_j = \begin{cases} e_j + e_i & i + 1 = j \text{ oder } i - 1 = j \\ -e_i & i = j \\ e_j & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n.$$

Setzen wir  $e'_k = \sum_{j=k}^{n+1} e_j$  für  $1 \leq k \leq n + 1$ . Es gilt

$$\rho(s_i)e'_k = \sum_{j=1}^{i-2} e_j + e_{i-1} + e_i - e_i + e_{i+1} + e_i + \sum_{j=i+2}^{n+1} e_j = e'_k, \quad k \leq i - 1,$$

$$\rho(s_i)e'_i = -e_i + e_{i+1} + e_i + \sum_{j=i+2}^{n+1} e_j = e'_{i+1}, \quad \rho(s_i)e'_{i+1} = e_{i+1} + e_i + \sum_{j=i+2}^{n+1} e_j = e'_i,$$

$$\rho(s_i)e'_k = \sum_{j=i+2}^{n+1} e_j = e'_k, \quad k \geq i + 2.$$

Damit folgt, dass  $\Sigma_i = \rho(s_i)_{B'}^{B'}$  bezüglich der Basis  $B' = (e'_1, \dots, e'_{n+1})$  die Permutationsmatrix ist, die die Basisvektoren  $e'_i$  und  $e'_{i+1}$  miteinander vertauscht und alle anderen Basisvektoren invariant lässt. Als Folge von Lemma 12.8 ist  $\rho: W(A_n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(U)$  injektiv. Da die Gruppe  $\text{Perm}(n + 1)$  der  $(n + 1) \times (n + 1)$  Permutationsmatrizen aber von den elementaren Vertauschungen  $(\Sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$  erzeugt wird ist  $\rho$  auch surjektiv. Wir erhalten damit den gewünschten Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} W(A_n) & \xrightarrow{\rho} & \text{Perm}(n + 1) & \xrightarrow{\text{can}} & S_n \\ s_i & \longmapsto & \Sigma_i & \longmapsto & \sigma_i \end{array}$$

□

ÜBUNG 12.6. Vervollständigen Sie den alternativen Beweis, dass  $W(A_n) \cong S_{n+1}$  für alle  $n \geq 2$ .

- (i) Beweisen Sie, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $f: W(A_n) \rightarrow S_{n+1}$  gibt mit  $f(s_i) = \sigma_i$ .
- (ii) Zeigen Sie induktiv, dass  $|W(A_i)| = (n + 1)!$ . Beginnen Sie dabei mit dem Fall  $i = 1$ . (Hier ist  $W(A_1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .)
- (iii) Definieren Sie für den Induktionsschritt für jedes  $0 \leq i \leq n + 1$  das Element  $\tau_i = \sigma_{n+1} \dots \sigma_i \in W(A_{n+1})$ . Beweisen Sie  $\tau_j \notin W(A_n)\tau_i$  für  $i \neq j$  und für jedes  $w \in W(A_{n+1})$  existiert ein  $0 \leq i \leq n + 1$ , sodass  $w \in W(A_{n+1})\tau_i$ .
- (iv) Folgern Sie daraus, dass  $W(A_{n+2}) = \sqcup_{i=0}^{n+1} W(A_n)\tau_i$ , was  $|W(A_{n+2})| = (n + 2)!$  impliziert.

Anhand der Coxeter-Graphen können wir erkennen, dass es "große" Untergruppen in  $W(B_n)$  und  $W(D_n)$  gibt, die isomorph zu symmetrischen Gruppen sind.

BEMERKUNG 12.11. Betrachten wir eine natürliche Zahl  $n \geq 2$ . Es sei  $[x]_i \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  für jedes  $[x] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $1 \leq i \leq n$  das eindeutige Element aus  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dessen  $i$ -ter Eintrag  $[x]$  ist und ansonsten alle Werte konstant  $[0]$  sind. Es gibt einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus

$$\phi: S_n \rightarrow \text{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n), \quad \text{sodass} \quad \phi(\sigma)[x]_i = [x]_{\sigma(i)}$$

und wir können das (äußere) semidirekte Produkt  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes_{\phi} S_n$  bilden. Die Gruppenstruktur ist bestimmt durch

$$([x]_i, \sigma)([y]_j, \tau) = ([x]_i + [y]_{\sigma(j)}, \sigma\tau).$$

LEMMA 12.12. *Unter Verwendung der Notation aus Bemerkung 12.11 gibt es für jede natürliche Zahl  $n \geq 3$  einen Gruppenisomorphismus*

$$g: W(B_n) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes_{\phi} S_n, \quad s_j \longmapsto (e, \sigma_j) \text{ für } j \leq n-1, \quad s_n \longmapsto ([1]_n, e).$$

Zum Beweis des Lemmas benötigen wir eine allgemeine Feststellung über Präsentationen von semidirekten Produkten. Wir schreiben  $F(X)$  für die von der Menge  $X$  erzeugte freie Gruppe.

LEMMA 12.13. *Seien  $N = F(X)/R_X$  und  $H = F(Y)/R_Y$  zwei Präsentationen und  $\phi: H \longrightarrow \text{Aut}(N)$  ein Gruppenhomomorphismus sowie  $\psi: X \longrightarrow \text{Bij}(Y)$  so, dass für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$  gilt  $[\psi(y)x] = \phi([y])[x]$ . Dann ist*

$$N \rtimes_{\phi} H \cong F(X \sqcup Y) / \langle R_X, R_Y, yxy^{-1} = \psi(y)x \text{ für alle } y \in Y, x \in X \rangle.$$

BEWEIS. Die Zuordnungen  $x \longmapsto ([x], e)$  und  $y \longmapsto (e, [y])$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$  induzieren einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\pi: F(X \sqcup Y) \longrightarrow N \rtimes_{\phi} H$ . Es gilt

$$\pi(yxy^{-1}) = (e, [y])([x], e)(e, [y^{-1}]) = (\phi([y])[x], e) = \pi(\psi(y)x).$$

Wegen des ersten Homomorphiesatzes gibt es also auch einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\pi': F(X \sqcup Y)_{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} F(X \sqcup Y) / \langle yxy^{-1} = \psi(y)x, y \in Y, x \in X \rangle \longrightarrow N \rtimes_{\phi} H.$$

Da für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$  gilt  $\langle xyx' \rangle = \langle xyx'y^{-1}y \rangle = \langle x\psi(y)x'y \rangle$ , hat jedes Element  $\langle w \rangle \in F(X \sqcup Y)_{\psi}$  einen Repräsentanten  $\langle w \rangle = \langle x_1 \dots x_i y_1 \dots y_j \rangle$ , wobei  $x_1, \dots, x_i \in X \sqcup X^{-1}$  und  $y_1, \dots, y_j \in Y \sqcup Y^{-1}$ . Hierbei bezeichne  $X^{-1}$  und  $Y^{-1}$  die Mengen der (formalen) Inversen der Erzeuger aus  $X$  beziehungsweise aus  $Y$ . Aus der Identität  $\pi'(\langle w \rangle) = ([x_1 \dots x_i], [y_1, \dots, y_j]) = (e, e)$  genau dann, wenn  $[x_1 \dots x_i] = e$  und  $[y_1 \dots y_j] = e$  folgt unter abermaligem Anwenden des Homomorphiesatzes die Aussage.  $\square$

BEWEIS DES LEMMAS 12.12. Gemäß Lemma 12.13 ist  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes_{\phi} S_n$  erzeugt von den Elementen  $\bar{\sigma}_i = (e, \sigma_i)$  für alle  $1 \leq i \leq n-1$  sowie  $\bar{\tau}_i = ([1]_i, e)$  mit  $1 \leq i \leq n$  und den Relationen

- (a)  $(\bar{\sigma}_i)^2 = e, \quad (\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1})^3 = e, \quad (\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j)^2 = e \quad |i - j| \geq 2,$
- (b)  $(\bar{\tau}_k)^2 = e, \quad (\bar{\tau}_k \bar{\tau}_l)^2 = e,$
- (c)  $\bar{\sigma}_i \bar{\tau}_{i+1} \bar{\sigma}_i = \bar{\tau}_i, \quad (\bar{\sigma}_i \bar{\tau}_k)^2 = e, \quad i \neq k \text{ und } i+1 \neq k,$

für geeignete  $1 \leq i, j \leq n-1$  und  $1 \leq l, k \leq n$ . Um zu zeigen, dass  $g$  wohldefiniert ist, reicht es festzustellen, dass

$$(\bar{\sigma}_{n-1} \bar{\tau}_n)^4 = (\bar{\sigma}_{n-1} \bar{\tau}_n \bar{\sigma}_{n-1} \bar{\tau}_n)^2 = (\bar{\tau}_{n-1} \bar{\tau}_n)^2 = e.$$

Wir geben nun ein Inverses von  $g$  explizit an.

$$h: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes_{\phi} S_n \longrightarrow W(B_n), \quad \bar{\sigma}_i \longmapsto s_i, \quad \bar{\tau}_k \longmapsto s_k \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_k.$$

Sobald gezeigt ist, dass  $h$  wohldefiniert ist, folgt aus der Definition von  $g$  und  $h$  sofort, dass diese jeweils invers zueinander sind. Wieder gilt es, die Relationen zu überprüfen. Dazu führen wir die Kurzschreibweise  $t_k \stackrel{\text{def}}{=} s_k \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_k$  für alle  $1 \leq k \leq n$  ein. Die

Relationen (a) sind per Definition von  $W(B_n)$  erfüllt. Für die Relationen (c) berechnen wir:

$$\begin{aligned}
s_i t_{i+1} s_i &= s_i (s_{i+1} \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_{i+1}) s_i = t_i \\
s_i t_k s_i &= s_i (s_k \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_k) s_i = t_k \quad i < k - 1 \\
s_i t_k s_i &= s_i (s_k \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_k) s_i \\
&= s_k \dots s_{i-2} s_i s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_{i+1} s_i s_{i-1} s_i s_{i-2} \dots s_k \\
&= s_k \dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_{i+1} s_{i-1} s_i s_{i-1} s_{i-2} \dots s_k \\
&= s_k \dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_{i+1} s_i s_{i-1} s_{i-2} \dots s_k = t_k, \quad i \geq k + 1
\end{aligned}$$

Schließlich verifizieren wir Relation (b)

$$\begin{aligned}
t_k^2 &= s_k \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_k s_k \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_k = s_k \dots s_{n-1} s_n s_n s_{n-1} \dots s_k = e \\
t_k t_l &= (s_l \dots s_{n-1}) (s_{n-1} \dots s_l) t_k (s_l \dots s_{n-1}) (s_n s_{n-1} \dots s_l) \\
&= (s_l \dots s_{n-1}) t_k (s_n s_{n-1} \dots s_l) \\
&= (s_l \dots s_{n-1}) (s_k \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_k) (s_n s_{n-1} \dots s_l) \\
&= (s_l \dots s_{n-1}) (s_k \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_k) (s_{n-1} \dots s_l) \\
&= (s_l \dots s_{n-1}) (s_k \dots s_{n-2} s_n s_{n-1} s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_k) (s_{n-1} \dots s_l) \\
&= (s_l \dots s_{n-1} s_n) (s_k \dots s_{n-2} s_{n-1} s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_k) (s_{n-1} \dots s_l) \\
&= (s_l \dots s_{n-1} s_n) (s_{n-1} \dots s_l) (s_l \dots s_{n-1}) (s_k \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_k) (s_{n-1} \dots s_l) \\
&= t_l (s_l \dots s_{n-1}) t_k (s_{n-1} \dots s_l) = t_l t_k, \quad l \geq k + 1
\end{aligned}$$

□

Coxeter-Gruppen vom Typ  $D$  können wir als spezielle (normale) Untergruppen des Index 2 von Typ  $B$  Gruppen auffassen.

LEMMA 12.14. Für  $n \geq 4$  definiert die Wirkung

$$\triangleright : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}, \quad [1] \triangleright i = \begin{cases} i & i \leq n-2 \\ n & i = n-1 \\ n-1 & i = n \end{cases}$$

einen Gruppenhomomorphismus  $\psi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Aut}(W(D_n))$  mit  $\psi([1])s_i = s_{[1] \triangleright i}$  und es gilt  $W(B_n) \cong W(D_n) \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass  $\psi$  mit den Relationen von  $W(D_n)$  kompatibel ist. Für  $1 \leq i, j \leq n-2$  ist

$$\begin{aligned}
s_{[1] \triangleright i}^2 &= e, & (s_{[1] \triangleright i} s_{[1] \triangleright j})^2 &= (s_i s_j)^2 = e, \quad |i-j| \geq 2, \\
(s_{[1] \triangleright i} s_{[1] \triangleright i+1})^3 &= (s_i s_{i+1})^3 = e, & i &\leq n-3 \\
(s_{[1] \triangleright n-2} s_{[1] \triangleright n-1})^3 &= (s_{n-2} s_n)^3 = e, & (s_{[1] \triangleright n-2} s_{[1] \triangleright n})^3 &= (s_{n-2} s_{n-1})^3 = e, \\
(s_{[1] \triangleright n-1} s_{[1] \triangleright n})^2 &= (s_n s_{n-1})^2 = e
\end{aligned}$$

Damit ist  $\psi$  somit wohldefiniert. Nach Lemma 12.13 ist  $W(D_n) \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  erzeugt von Elementen  $\overline{s}_{1 \leq i \leq n}$  und  $\overline{t}$  mit den folgenden Relationen, wobei  $1 \leq i, j \leq n-2$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad & (\overline{s}_i)^2 = e, \quad (\overline{s}_i \overline{s}_j)^2 = e, \quad |i-j| \geq 2 \quad (\overline{s}_i \overline{s}_{i+1})^3 = e, \\ \text{(e)} \quad & (\overline{s}_{n-2} \overline{s}_n)^3 = e, \quad (\overline{s}_{n-1} \overline{s}_n)^2 = e, \\ \text{(f)} \quad & \overline{t}^2 = e, \quad (\overline{t} \overline{s}_i)^2 = e, \quad \overline{t} \overline{s}_{n-1} \overline{t} = \overline{s}_n \end{aligned}$$

Wir definieren  $g: W(D_n) \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow W(B_n)$  mittels der Zuordnung  $\overline{s}_i \mapsto s_i$  für alle  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\overline{s}_n \mapsto s_n s_{n-1} s_n$  und  $\overline{t} \mapsto s_n$ . Um die Wohldefiniertheit zu verifizieren überprüfen wir die Relationen. Da das Pendant zu den Gleichungen (d) in  $W(B_n)$  per Definition erfüllt ist und  $g(\overline{t})^2 = s_n^2 = e$ , reicht es die folgenden Gleichungen zu verifizieren. Dafür sei wieder  $1 \leq i \leq n-2$

$$\begin{aligned} (g(\overline{s}_{n-2})g(\overline{s}_n))^3 &= (s_{n-2} s_n s_{n-1} s_n)^3 = (s_n s_{n-2} s_{n-1} s_n)^3 = s_n (s_{n-2} s_{n-1})^3 s_n = e \\ (g(\overline{s}_{n-1})g(\overline{s}_n))^2 &= (s_{n-1} s_n s_{n-1} s_n)^2 = e, \quad (g(\overline{t})g(\overline{s}_i))^2 = (s_n s_i)^2 = e \\ g(\overline{t})g(\overline{s}_{n-2})g(\overline{t}) &= s_n s_{n-1} s_n = g(\overline{s}_n) \end{aligned}$$

Wieder geben wir ein Inverses von  $g$  explizit an. Es sei  $h: W(B_n) \rightarrow W(D_n) \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  bestimmt durch  $s_i \mapsto \overline{s}_i$  für alle  $1 \leq i \leq n-1$ , und  $s_n \mapsto \overline{t}$ . Wir bestimmen

$$(h(s_{n-1})h(t))^4 = (\overline{s}_{n-1} \overline{t})^4 = (\overline{s}_{n-1} \overline{t} \overline{s}_{n-1} \overline{t})^2 = (\overline{s}_{n-1} \overline{s}_n)^2 = e.$$

Damit folgt die Wohldefiniertheit von  $h$  und, da  $g$  und  $h$  zueinander invers sind, die Aussage.  $\square$

Wir können nun Clifford-Theorie, vor allem Korollar 11.4, anwenden um, in Abhängigkeit von einfachen Darstellungen der symmetrischen Gruppe, die wir nächste Woche berechnen wollen, die einfachen Darstellungen von Coxeter-Gruppen vom Typ  $B$  und  $D$  zu charakterisieren.

**WIEDERHOLUNG.** Die Partitionen einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  sind Tupel  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  von natürlichen Zahlen  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$  die aufsummiert  $n$  ergeben. Jedem Element  $\sigma \in S_n$  können wir eine eindeutige Partition zuordnen, indem wir die Zyklenlängen von  $\sigma$  (absteigend) anordnen. Da zwei Elemente von  $S_n$  genau dann zueinander konjugiert sind, wenn sie die gleiche Zyklenlängen haben entsprechen die Konjugationsklassen von  $S_n$  genau den Partitionen von  $S_n$ .

**LEMMA 12.15.** Sei  $n \geq 2$ .

- (i) Die Isomorphieklassen einfacher komplexer Darstellungen der Gruppe  $W(A_n)$  sind in Bijektion mit Partitionen der Zahl  $n+1$ .
- (ii) Für jede einfache Darstellung  $V$  von  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1} \rtimes_{\phi} S_{n+1} \cong W(B_{n+1})$  existieren eindeutige nichtnegative ganze Zahlen  $l+k = n+1$  sowie bis auf Isomorphie eindeutige einfache Darstellungen  $U_1$  und  $U_2$  von  $S_l$  und  $S_k$ , sodass

$$V \cong \text{Ind}_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes_{\phi} (S_l) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k \rtimes_{\phi} S_k}^{W(B_n)} ((\mathbb{C}_{\text{triv}} \otimes U_1) \otimes (\mathbb{C}_{\text{sgn}} \otimes U_2)).$$

**BEWEIS.**

Zu (i): Die Isomorphieklassen einfacher komplexer Darstellungen einer endlichen Gruppe  $G$  sind in Bijektion mit den Konjugationsklassen von  $G$ . Da  $W(A_n) \cong S_{n+1}$  und die Konjugationsklassen von  $S_{n+1}$  den möglichen Zykletypen und damit den Partitionen von  $\{n+1\}$  entsprechen, folgt die Aussage.

Zu (ii): Sei  $V' \subset \text{Res}_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1} \rtimes_{\phi} S_{n+1}}^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1}}(V)$  ein direkter Summand der Restriktion einer einfachen Darstellung von  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1} \rtimes_{\phi} S_{n+1}$ . Insbesondere ist  $V'$  eindimensional und es existieren eindeutige natürliche Zahlen  $l, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $l + k = n + 1$  sowie ein nicht notwendigerweise eindeutiges Element  $\sigma \in S_{n+1}$ , sodass

$$(\rho_{V'} \circ \phi(\sigma))([1]_i) = \begin{cases} 1 & i \leq l, \\ -1 & i > l. \end{cases}$$

Sei  $V'' = \sigma^{-1} V'$ . Die Stabilisatorgruppe von  $V''$  ist  $S_l \times S_k$ . Damit liefert Korollar 11.4 und Bemerkung 11.5 die Aussage. □

Um die einfachen Darstellungen von  $W(D_n)$  zu klassifizieren benutzen wir, dass es eine normale Untergruppe von  $W(B_n)$  vom Index 2 ist.

LEMMA 12.16. *Es sei  $N \subset G$  eine normale Untergruppe deren Index  $p = G/N$  eine Primzahl ist und  $V$  eine einfache komplexe Darstellung  $V$  von  $G$ . Dann ist  $\text{Res}_G^N(V)$  genau dann einfach, wenn  $V \not\cong V \otimes X$  für alle eindimensionalen Darstellungen  $X$  von  $G$  mit  $N = \ker X$ . Ansonsten gibt es eine einfache Darstellung  $W \subset \text{Res}_G^N(V)$  von  $N$ , sodass  ${}^x W \cong {}^y W$  genau dann, wenn  $xN = yN$  und  $\text{Res}_G^N(V) = \bigoplus_{[g] \in G/N} {}^g W$ .*

BEWEIS. Wir analysieren zunächst die Struktur eindimensionaler Darstellungen von  $G$  die  $N$  im Kern der Wirkung enthalten. Aus dem erste Homomorphiesatz folgt, dass Isomorphieklassen eindimensionaler Darstellungen von  $G$  mit  $N$  im Kern der Wirkung und Isomorphieklassen irreduzibler Darstellung von  $G/N$  in Bijektion stehen. Da  $G/N$  eine abelsche Gruppe der Ordnung  $p$  ist, bilden die Isomorphieklassen der eindimensionalen Darstellungen mit Tensorieren als Multiplikation eine zyklische Gruppe der Ordnung  $p$ . Also gibt es eine eindimensionale Darstellung  $X$  von  $G$  mit  $N \subset \ker \rho_X$ , sodass für jede weiter eindimensionale Darstellung  $Y$  mit  $N \subset \ker \rho_Y$  ein  $l \in \mathbb{N}$  existiert, sodass das  $l$ -fache Tensorprodukt  $X^{\otimes l}$  isomorph zu  $Y$  ist. Insbesondere folgt aus  $V \cong V \otimes X$  bereits  $V \cong V \otimes Y$ .

Wir berechnen nun unter Zuhilfenahme von Übungsaufgabe 8.7

$$\text{Ind}_N^G \text{Res}_G^N(V) \cong \text{Ind}_N^G(\text{Res}_G^N(V) \otimes \mathbb{C}_{\text{triv}}) \cong V \otimes \text{Ind}_N^G(\mathbb{C}_{\text{triv}}).$$

Für alle  $n \in N$  und  $g \in G$  haben wir

$$\rho_{\text{Ind}(n)}(g \otimes_{\mathbb{C}[N]} 1) = ng \otimes_{\mathbb{C}[N]} 1 = g(g^{-1}ng) \otimes_{\mathbb{C}[N]} 1 = g \otimes_{\mathbb{C}[N]} 1.$$

Wir definieren auf  $\mathbb{C}[G/N]_{\text{reg}}$  eine Wirkung  $\rho_{\text{quot}}: \mathbb{C}[G/N] \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G/N])$  von  $G$  mittels  $\rho_{\text{quot}}(g)g'N = gg'N$ . Die vorangegangene Rechnung zeigt, dass mittels der Zuordnung  $g \otimes_{\mathbb{C}[N]} 1 \mapsto gN$  ein Isomorphismus von Darstellungen zwischen  $\text{Ind}_N^G(\mathbb{C}_{\text{triv}})$  und  $\mathbb{C}[G/N]_{\text{reg}}$  implementiert wird. Es folgt

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_N(\text{Res}_G^N(V), \text{Res}_G^N(V)) &= \dim \text{Hom}_G(V, \text{Ind}_G^N \text{Res}_G^N(V)) \\ &= \dim \text{Hom}_G(V, V \otimes \mathbb{C}[G/N]_{\text{reg}}) \\ &= \sum_{i=1}^p \dim \text{Hom}_G(V, V \otimes X^{\otimes i}) = \begin{cases} 1 & V \not\cong V \otimes X \\ p & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit folgt,  $\text{Res}_G^N(V)$  ist genau dann einfach, wenn  $V \not\cong V \otimes Y$  für alle eindimensionalen Darstellungen  $Y$  von  $G$  mit  $N = \ker \rho_Y$ .

Nehmen wir nun an  $W \subset \text{Res}_G^N(V)$  sei eine echte einfache Unterdarstellung. Nach dem Satz von Clifford gilt  $\text{Res}_G^N(V) = \bigoplus_{[g] \in G/G_W} {}^g(W^a)$ . Wir haben

$$\begin{aligned} p &= \dim \text{Hom}_N(\text{Res}_G^N(V), \text{Res}_G^N(V)) \\ &= \dim \text{Hom}_N(\bigoplus_{[g] \in G/G_W} {}^g(W^a), \bigoplus_{[g] \in G/G_W} {}^g(W^a)) = |G/G_W| a^2 \end{aligned}$$

und damit  $a = 1$  sowie  $|G/G_W| = p$ , was  $G_W = N$  impliziert.  $\square$

ÜBUNG 12.1. Sei  $W$  eine Gruppe und  $s, t \in W$  Elemente der Ordnung 2. Beweisen Sie, dass aus  $(st)^n = e$  auch  $(ts)^n = e$  folgt.

ÜBUNG 12.2. Zeigen Sie, dass  $\langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^4 = abc = e \rangle \cong W(A_3)$ .

ÜBUNG 12.3. Beweisen Sie Lemma 12.5.

ÜBUNG 12.4. Für ein Coxeter-System  $(W, S)$  mit geometrischer Standarddarstellung  $V_{std}$  definieren wir die Menge  $\Delta = \{\rho_{std}(w)e_s \mid w \in W, s \in S\}$ . Man kann zeigen, dass  $\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ , wobei  $\Delta^+ = \{r \in \Delta \mid r = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s, \lambda_s \geq 0 \text{ für alle } s \in S\}$ . Außerdem gilt für alle  $s \in S$ , dass  $\rho_{std}(s)(\Delta^+ \setminus e_s) = \Delta^+ \setminus e_s$ .

Die Länge der Elemente von  $W$  ist bestimmt durch die Abbildung

$$l: W \longrightarrow \mathbb{N}, \quad l(w) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_{i_1}, \dots, s_{i_n} \in S : w = s_{i_n} \dots s_{i_1}\}.$$

Für  $w \in W$  schreiben wir  $S(w) = \{r \in \Delta^+ \mid \rho_{std}(w)r \in -\Delta^+\}$ . Beweisen Sie  $l(w) = |S(w)|$ .

Hinweis: Zeigen Sie, dass für  $w = s_{i_{l(w)}} \dots s_{i_1}$  gilt  $S(w) = \{s_{i_k} \dots s_{i_1}(e_{s_i}) \mid 1 \leq k \leq n\}$ .

ÜBUNG 12.5. Beweisen Sie, dass es zwei Coxeter-Systeme  $(W, S)$  und  $(W', S')$  gibt, sodass  $|S| \neq |S'|$  aber  $W \cong D_{12} \cong W'$ .

ÜBUNG 12.6. Vervollständigen Sie den alternativen Beweis, dass  $W(A_n) \cong S_{n+1}$  für alle  $n \geq 2$ .

- (i) Beweisen Sie, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $f: W(A_n) \longrightarrow S_{n+1}$  gibt mit  $f(s_i) = \sigma_i$ .
- (ii) Zeigen Sie induktiv, dass  $|W(A_i)| = (i+1)!$ . Beginnen Sie dabei mit dem Fall  $i = 1$ . (Hier ist  $W(A_1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .)
- (iii) Definieren Sie für den Induktionsschritt für jedes  $0 \leq i \leq n+1$  das Element  $\tau_i = \sigma_{n+1} \dots \sigma_i \in W(A_{n+1})$ . Beweisen Sie  $\tau_j \notin W(A_n)\tau_i$  für  $i \neq j$  und für jedes  $w \in W(A_{n+1})$  existiert ein  $0 \leq i \leq n+1$ , sodass  $w \in W(A_{n+1})\tau_i$ .
- (iv) Folgern Sie daraus, dass  $W(A_{n+2}) = \sqcup_{i=0}^{n+1} W(A_n)\tau_i$ , was  $|W(A_{n+2})| = (n+2)!$  impliziert.

### 13. Woche 13: Die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe

However, gambling is nothing but the applied representation theory of  $S_n$ .

---

Ivan Cherednik – Degenerate affine Hecke algebras and two-dimensional particles

In dieser Woche behandeln wir:

- (i) Young-Tableaus und Tabloids
- (ii) horizontale und vertikale Untergruppen
- (iii) Specht-Moduln
- (iv) die Klassifikation der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von symmetrischen Gruppen

Wir haben in Woche 6 gesehen, dass die Charaktere irreduzibler komplexer Darstellungen einer endlichen Gruppe in Bijektion stehen mit den Konjugationsklassen der Gruppe. Diese Korrespondenz fußt allerdings nicht auf darstellungstheoretischen Überlegungen, sondern ist der Tatsache geschuldet, dass die Konjugationsklassen einer Gruppe eine Basis des Zentrums der Gruppenalgebra bilden und, als Folge des Satzes von Artin–Wedderburn 5.3, die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen der Dimension des Zentrums der (Gruppen-)Algebra entspricht. Zum Abschluss der Vorlesung wollen wir für symmetrische Gruppen explizit aus dem (kombinatorischen) Datum der Konjugationsklassen alle irreduziblen (komplexen) Darstellungen konstruieren.

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt bereits gesehen, dass Partitionen von natürlichen Zahlen und Isomorphieklassen irreduzibler komplexer Darstellungen der symmetrischen Gruppe in Bijektion stehen. Dies ist zentral für die folgenden Überlegungen.

WIEDERHOLUNG. Die Partitionen einer Zahl  $n \in \mathbb{N}$  sind Tupel  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  von natürlichen Zahlen  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$  die aufsummiert  $n$  ergeben. Man schreibt  $\lambda \vdash n$ .

Um mit Partitionen zu rechnen, wollen wir ihnen ein graphisches Kalkül geben.

DEFINITION 13.1. Das *Young-Diagramm* einer Partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  einer natürlichen Zahl  $n$  besteht aus  $k$  Reihen gleich großer, linksbündig angeordneter Quadrate, sodass die  $i$ -te Reihe  $\lambda_i$  Quadrate enthält. Man nennt  $\lambda$  die *Form* des Young-Diagramms.

Ein *Young-Tableau*  $T$  ist ein Young-Diagramm dessen Quadrate ohne Doppelnennung mit den Zahlen  $1, \dots, n$  gefüllt sind. Wie bei Matrizen schreibt man  $T_{ij}$  für den  $j$ -ten Eintrag der  $i$ -ten Zeile des Tableaus. Ist  $T_{ij} < T_{kl}$  falls  $i = k$  und  $j < l$  oder  $j = l$  und  $i < k$  spricht man von einem *Standard-Young-Tableau*.

Die unten abgebildeten Young-Tableaus  $T_1$  und  $T_2$  der Form  $\lambda = (3, 2, 2)$  sind in Standard-Form;  $T_3$  hingegen nicht.

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array} \quad
 T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 3 & 7 & \\ \hline \end{array} \quad
 T_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 7 & \\ \hline 6 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

Indem wir die Reihen und Spalten eines Tableaus  $T$  der Form  $\lambda$  vertauschen, erhalten wir das *transponierte Young-Tableau*  $T^t$  der Form  $\lambda^t$ . Zum Beispiel sind

1	2	3
4	5	
6	7	

und

1	4	6
2	5	7
3		

zueinander transponiert.

Die natürliche Wirkung der Gruppe  $S_n$  auf der Menge  $\{1, \dots, n\}$  definiert eine Wirkung auf der Menge  $\mathbb{T}^\lambda$  der Tableaus der Form  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ :

$$S_n \times \mathbb{T}^\lambda \longrightarrow \mathbb{T}^\lambda, \quad (\sigma, T) \longmapsto \sigma.T, \text{ wobei } (\sigma.T)_{ij} = \sigma(T_{ij}).$$

Im Folgenden werden von dieser Wirkung abgeleitete Untergruppen eine zentrale Rolle spielen.

DEFINITION 13.2. Sei  $T$  ein Young-Tableau der Form  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  und  $X_i = \{T_{ij} \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ . Die zu  $T$  gehörende *horizontale Untergruppe* von  $T$  ist

$$(13.1) \quad H_T \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in S_n \mid \sigma(X_i) = X_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq k\} \subset S_n.$$

Die *vertikale Untergruppe*  $V_T \subset S_n$  von  $T$  ist die horizontale Untergruppe des transponierten Tableaus  $T^t$ .

- ÜBUNG 13.1. (i) Sind die zum Tableau 

1	2
3	4

 gehörenden horizontalen und vertikalen Untergruppen isomorph? Sind sie abelsch?
- (ii) Zeigen Sie, dass jede zu einem Tableau  $T$  der Form  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  gehörende horizontale Untergruppe isomorph ist zu  $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ .

Wir wollen zunächst anhand von bekannten Beispielen eine Intuition für den Zusammenhang zwischen der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen, Young-Tableaus und ihren horizontalen Untergruppen entwickeln.

BEISPIEL 13.3. Betrachten wir die Partition (2) von 2. Diese hat zwei Young-Tableaus, wobei nur das erste in Standardform ist:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die zugehörige horizontale Untergruppe ist  $S_2$ . Damit wirkt  $S_2$  trivial auf der Bahn  $\mathcal{T}^{(2)}$  von  $T_{12}$  und dementsprechend auf dem Vektorraum  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^{(2)}] = \{f: \mathcal{T}^{(2)} \rightarrow \mathbb{C}\}$ . Diese Darstellung entspricht der trivialen Darstellung von  $S_2$ .

Die Partition  $\lambda = (2, 1)$  hat 2 Standard-Young-Tableaus und 4-Tableaus die nicht in Standardform sind:

$$T_{12,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T_{21,3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T_{13,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T_{31,2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$T_{23,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T_{32,1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die horizontale Untergruppe von  $T$  ist  $H_{T_{12,3}} = \{e, (1\ 2)\}$ . Analog ist  $H_{T_{13,2}} = \{e, (1\ 3)\}$  und  $H_{T_{23,1}} = \{e, (2\ 3)\}$ . Man beachte, dass  $H_{T_{12,3}}$ ,  $H_{T_{13,2}}$  und  $H_{T_{23,1}}$  zueinander konjugiert

sind und jeweils Paare an Tableaus ineinander überführen. Die dreielementige Menge der Bahnen  $\mathcal{T}^\lambda = \{(T_{12,3}, T_{21,3}), (T_{13,2}, T_{31,2}), (T_{23,1}, T_{32,1})\}$  erzeugt einen dreidimensionalen Vektorraum  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda]$ . Die Wirkung von  $S_3$  auf den Young-Tableaus der Form  $\lambda$  induziert eine Wirkung auf den Bahnen. Damit ergibt sich eine Darstellung auf  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda]$ . Um den Homomorphismus  $\rho: S_3 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda])$  kompakt angeben zu können schreiben wir  $[T_{ab,c}]$  für den zur Bahn  $(T_{xy,z}, T_{yx,z})$  gehörenden Basisvektor, wobei  $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$  paarweise verschiedene Zahlen sind. Man beachte, dass  $[T_{xy,z}] = [T_{yx,z}]$  gilt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho((1\ 2))[T_{12,3}] &= [T_{21,3}] = [T_{12,3}], & \rho((1\ 2))[T_{13,2}] &= [T_{23,1}], & \rho((1\ 2))[T_{23,1}] &= [T_{13,2}] \\ \rho((2\ 3))[T_{12,3}] &= [T_{13,2}], & \rho((2\ 3))[T_{13,2}] &= [T_{12,3}], & \rho((2\ 3))[T_{23,1}] &= [T_{32,1}] = [T_{23,1}]. \end{aligned}$$

Der vom Vektor  $[T_{12,3}] + [T_{23,1}] + [T_{13,2}]$  aufgespannte eindimensionale Unterraum ist invariant unter der Wirkung; ebenso  $\text{span}_{\mathbb{C}}([T_{12,3}] - [T_{23,1}], [T_{13,2}] - [T_{23,1}]) \subset \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda]$  und wir erhalten die Zerlegung  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \cong \mathbb{C}_{\text{triv}} \oplus \mathbb{C}_{\text{std}}^2$ .

Um das angegebene Erzeugendensystem der Standarddarstellung kombinatorisch zu beschreiben, benutzen wir die vertikale Untergruppen  $V_{T_{12,3}} = \{e, (1\ 3)\}$ ,  $V_{T_{13,2}} = \{e, (2\ 3)\}$  und  $V_{T_{23,1}} = \{e, (1\ 2)\}$ . Wenden wir die Elemente  $v_{12,3} = e - (1\ 3)$  und  $v_{13,2} = e - (1\ 2) = v_{23,1}$  auf unsere Basis an, erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{12,3} \triangleright [T_{12,3}] &= [T_{12,3}] - [T_{23,1}], & v_{13,2} \triangleright [T_{12,3}] &= [T_{12,3}] - [T_{21,3}] = 0, \\ v_{12,3} \triangleright [T_{23,1}] &= [T_{23,1}] - [T_{12,3}], & v_{13,2} \triangleright [T_{23,1}] &= [T_{23,1}] - [T_{13,2}], \\ v_{12,3} \triangleright [T_{13,2}] &= [T_{13,2}] - [T_{31,2}] = 0, & v_{13,2} \triangleright [T_{13,2}] &= [T_{13,2}] - [T_{23,1}], \end{aligned}$$

DEFINITION 13.4. Gegeben einer Partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  ist ein *Young-Tabloid*  $[T]$  der Form  $\lambda$  die Äquivalenzklasse aller Young-Tableaus  $T$  der Form  $\lambda$  unter der Relation

$$T \sim T' \text{ genau dann, wenn ein } h \in H_T \text{ existiert, sodass } h.T = T'.$$

Man nennt  $[T]$  *standard*, falls es ein Standard-Young-Tableau  $T'$  gibt, sodass  $T \sim T'$ .

Die Menge aller Young-Tabloids wird mit  $\mathcal{T}$  bezeichnet,  $\mathcal{T}^\lambda \subset \mathcal{T}$  ist die Teilmenge aller Tabloids der Form  $\lambda$ .

ÜBUNG 13.2. Zeigen Sie, dass für jedes  $\sigma \in S_n$  und Tableaus  $T, T'$  der Form  $\lambda \vdash n$  gilt  $T \sim T'$  genau dann, wenn  $\sigma.T \sim \sigma.T'$ .

Man notiert Tabloids ähnlich wie Young-Tableaus durch ein mit entsprechenden Zahlen gefülltes Young-Diagramm, in dem man allerdings die vertikalen Trennlinien nicht einzeichnet. Das folgende Bild zeigt die vier Young-Tableaus die in dem Tabloid der rechten Seite zusammengefasst sind:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}.$$

BEMERKUNG 13.5. Die Wirkung der symmetrische Gruppe  $S_n$  auf den Young-Tableaus induziert eine Wirkung auf der Menge  $\mathcal{T}$ . Dieser Eigenschaft liegt zugrunde, dass für alle  $\sigma \in S_n$ , und jedes Young-Tableau  $T$  der Form  $\lambda \vdash n$  gilt, dass  $\sigma H_T \sigma^{-1} = H_{\sigma.T}$ . Somit hat das lineare Erzeugnis  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \stackrel{\text{def}}{=} \{f: \mathcal{T}^\lambda \rightarrow \mathbb{C}\}$  die Struktur einer Darstellung von  $S_n$ .

ÜBUNG 13.3. Wir fixieren die Partition  $\lambda = (3, 1)$  von 4.

(i) Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda]$ .

- (ii) Zeigen Sie, dass es ein Isomorphismus von Darstellungen  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \cong \mathbb{C}[S_n/H_T]$  gibt, für  $H_T$  die horizontale Gruppe eines Tableaus der Form  $\lambda$ .
- (iii) Beweisen Sie, dass  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \cong \text{Ind}_{H_T}^{S_n}(\mathbb{C}_{\text{triv}})$  wobei  $H_T$ , wie in der letzten Teilaufgabe, die horizontale Gruppe eines Tableaus  $T$  der Form  $\lambda$  ist.

Wir betrachten die Wirkungen bestimmter Elemente von Gruppenalgebren symmetrischer Gruppen auf von Tabloiden aufgespannten Vektorräumen. Dazu schreiben wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \vdash n$

$$-\triangleright -: \mathbb{C}[S_n] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda], \quad \sigma \triangleright [T] = [\sigma.T], \quad \text{für alle } \sigma \in S_n, [T] \in \mathcal{T}^\lambda.$$

DEFINITION 13.6. Es sei  $T$  eine Tableau der Form  $\lambda \vdash n$ . Man nennt das Element  $v_T = \sum_{v \in V_T} \text{sgn}(v)v \in \mathbb{C}[S_n]$  den *Spalten-Antisymmetrisator*.

Ihm zugeordnet ist das *assoziierte Polytabloid*

$$(13.2) \quad b_T \stackrel{\text{def}}{=} v_T \triangleright [T] = \sum_{v \in V_T} \text{sgn}(v)[v.T] \in \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda]$$

Ist  $T$  standard, so spricht man von einem *Standard-Polytabloid*.

ÜBUNG 13.4. Bestimmen Sie die Polytabloids zu den Tableaus

1	3	5	6
2	4		

5	6	1	3
2	4		

3	4	5
1	2	6

1	2
3	4
5	6

DEFINITION 13.7. Der *Specht-Modul* einer Partition  $\lambda \vdash n$  ist der Untervektorraum

$$(13.3) \quad S^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}_{\mathbb{C}}\{b_T \mid [T] \in \mathcal{T}^\lambda\} \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda].$$

Unser Ziel ist es, zu beweisen, dass Specht-Moduln die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe bestimmen. Dazu ordnen wir die Menge der Partitionen.

DEFINITION 13.8. Die *lexikographische Ordnung* der Partitionen von  $n \in \mathbb{N}$  ist für  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  und  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$  definiert durch

$$(13.4) \quad \lambda < \mu \iff \exists 1 \leq i \leq \min\{k, l\} : \lambda_i < \mu_i \text{ und } \lambda_j = \mu_j \ \forall 1 \leq j \leq i - 1.$$

ÜBUNG 13.5.

- (i) Beweisen Sie, dass die lexikographische Ordnung auf der Menge der Partitionen einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine wohldefinierte Totalordnung ist.
- (ii) Bestimmen Sie das maximale und minimale Element.
- (iii) Ist  $\lambda < \mu$  falls  $\mu^t < \lambda^t$ ?

Die lexikographische Ordnung ist eng mit der Wirkung von Spalten-Antisymmetrisatoren verbunden.

LEMMA 13.9. Seien  $\lambda \leq \mu$  zwei Partitionen der Zahl  $n \in \mathbb{N}$  und  $T^\lambda$  sowie  $T^\mu$  zugehörige Young-Tableaus. Es gilt  $v_{T^\lambda} \triangleright [T^\mu] = \pm b_{T^\lambda}$  genau dann, wenn  $\mu = \lambda$  und  $\sigma.T^\lambda = T^\mu$  für ein  $\sigma \in V_{T^\lambda}H_{T^\lambda}$ . Ansonsten ist  $v_{T^\lambda} \triangleright [T^\mu] = 0$ .

BEWEIS. Nehmen wir zunächst an,  $\lambda = \mu$  und  $vh.T^\lambda = T^\mu$  für  $vh \in V_{T^\lambda}H_{T^\lambda}$ . Es ist

$$v_{T^\lambda} \triangleright [T^\mu] = v_{T^\lambda} \triangleright [vh.T^\lambda] = v_{T^\lambda}v \triangleright [h.T^\lambda] = \text{sgn}(v)v_{T^\lambda} \triangleright [T^\lambda] = \pm b_{T^\lambda}.$$

Wir zeigen, dass, falls  $\lambda < \mu$  oder kein  $vh \in V_{T^\lambda}H_{T^\lambda}$  existiert mit  $vh.T^\lambda = T^\mu$ , wir ein Paar  $1 \leq x < y \leq n$  finden, das in einer Reihe von  $T^\mu$  und einer Spalte von  $T^\lambda$  vorkommt.

Angenommen es gäbe keine solchen Zahlen  $1 \leq x < y \leq n$ , würde ein  $v \in V_{T^\lambda}$  und ein  $h \in H_{T^\mu}$  existieren, sodass  $v.T^\lambda = h.T^\mu$ . Insbesondere muss  $\lambda = \mu$  gelten. Diese Gleichung können wir umschreiben zu  $T^\mu = h^{-1}v.T^\lambda = v(v^{-1}h^{-1}v).T^\lambda$ . Nun ist  $H_{T^\lambda} = (v^{-1}h)H_{T^\mu}(h^{-1}v)$  und damit

$$(v^{-1}h^{-1}v) = v^{-1}hh^{-1}h^{-1}v \in H_{T^\lambda}.$$

Existiere also ein Paar  $1 \leq x < y \leq n$  in einer Reihe von  $T^\mu$ , das auch in einer Spalte von  $T^\lambda$  vorkommt. Da die Permutation  $(x \ y)$  in  $V_{T^\lambda}$  enthalten ist, ergibt sich

$$v_{T^\lambda} \triangleright [T^\mu] = v_{T^\lambda} \triangleright [(x \ y)T^\mu] = (v_{T^\lambda}(x \ y)) \triangleright [T^\mu] = -v_{T^\lambda} \triangleright [T^\mu]$$

und damit  $v_{T^\lambda} \triangleright [T^\mu] = 0$ . □

ÜBUNG 13.6. Sei  $T$  ein Young-Tableau der Form  $\lambda \vdash n$ . Beweisen Sie, dass  $b_T \neq 0$ .

Wir können nun das erste wesentliche Resultat über Specht-Moduln beweisen.

THEOREM 13.10. Der zu einer Partition  $\lambda \vdash n$  assoziierte Specht-Modul  $S^\lambda$  ist irreduzibel.

BEWEIS. Per Definition ist  $S^\lambda = \text{span}_{\mathbb{C}}\{b_T \mid [T] \in \mathcal{T}^\lambda\} \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda]$  und da für jedes Tableau  $T$  der Vektor  $b_T \neq 0$  ist  $\{0\} \subsetneq S^\lambda$ . Um zu zeigen, dass  $S^\lambda$  unter der Wirkung von  $S_n$  abgeschlossen ist, betrachten wir ein Tableau  $X$  der Form  $\lambda$  und ein Element  $\sigma \in S_n$  und berechnen

$$\begin{aligned} \sigma \triangleright b_X &= \sigma \triangleright (v_X \triangleright [X]) = \sigma \triangleright \left( \sum_{v \in V_X} \text{sgn}(v)[v.X] \right) = \sum_{v \in V_X} \text{sgn}(v)[(\sigma v).X] \\ &= \sum_{v \in V_X} \text{sgn}(\sigma v \sigma^{-1})[(\sigma v \sigma^{-1}).(\sigma.X)] = \sum_{v' \in V_{\sigma.X}} \text{sgn}(v')[v'.(\sigma.X)] = v_{\sigma.X} \triangleright [\sigma.X] = b_{\sigma.X}. \end{aligned}$$

Somit ist  $S^\lambda$  eine Darstellung.

Nehmen wir an  $\{0\} \subsetneq W \subset S^\lambda$  sei eine Unterdarstellung und  $0 \neq w \in W$ . Damit ist  $w = \sum_{[T] \in \mathcal{T}^\lambda} c_{[T]}[T]$ , wobei nicht alle  $c_{[T]}$  gleich 0 sein können. Für jedes Tableau  $X$  der Form  $\lambda$  ist

$$v_X \triangleright w = \sum_{[T] \in \mathcal{T}^\lambda} c_{[T]}v_X[T] = \sum_{[T] \in \mathcal{T}^\lambda} c'_{[T]}b_X = c_X b_X$$

für eine Konstante  $c_X \in \mathbb{C}$ . Aus  $w \neq 0$  folgt, dass es ein Tableau  $X$  der Form  $\lambda$  gibt, sodass  $0 \neq c_X b_X \in W$ . Die vorangegangene Rechnung zeigt, dass damit aber auch  $b_{\sigma.X} \in W$  für alle  $\sigma \in S_n$ , was  $W = S^\lambda$  impliziert. □

Um zu zeigen, dass Specht-Moduln verschiedener Partitionen zueinander nicht isomorph sind, werden wir das folgende Lemma nutzen.

LEMMA 13.11. Sei  $f: \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{T}^\mu]$  ein Homomorphismus von Darstellungen und  $\lambda < \mu$ , dann ist  $S^\lambda \subseteq \ker f$ .

BEWEIS. Sei  $T$  ein Young-Tableau der Form  $\lambda$ . Da  $S^\lambda$  einfach ist, ist  $b_T \in S^\lambda$  ein Erzeuger. Es ist  $f[T] = c_1[T'_1] + \dots + c_k[T'_k]$  für Skalare  $c_1, \dots, c_k$  und Tableaus  $T'_1, \dots, T'_k$  der Form  $\mu$ . Unter Zuhilfenahme von Lemma 13.9 erhalten wir

$$f(b_T) = f(v_T \triangleright [T]) = v_T \triangleright (c_1[T'_1] + \dots + c_k[T'_k]) = 0.$$

Die Aussage folgt. □

**THEOREM 13.12.** Die Specht-Moduln  $S^\lambda$  und  $S^\mu$  zweier Partitionen  $\lambda, \mu \vdash n$  sind genau dann isomorph als Darstellungen von  $S_n$ , wenn  $\lambda = \mu$ .

Insbesondere ist jede einfache Darstellung von  $S_n$  isomorph zu einem eindeutigen Specht-Modul.

**BEWEIS.** Da die Gruppenalgebra  $\mathbb{C}[S^n]$  halbeinfach ist, gibt es Darstellungen  $W_1, W_2$ , sodass  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \cong S^\lambda \oplus W_1$  und  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\mu] \cong S^\mu \oplus W_2$ . Nehmen wir an  $\psi: S^\lambda \rightarrow S^\mu$  sei ein Isomorphismus. Dann gibt es Abbildungen

$$f = \iota_{S^\mu} \psi \pi_{S^\lambda}: \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \xrightarrow{\pi_{S^\lambda}} S^\lambda \xrightarrow{\psi} S^\mu \xrightarrow{\iota_{S^\mu}} \mathbb{C}[\mathcal{T}^\mu],$$

$$g = \iota_{S^\lambda} \psi^{-1} \pi_{S^\mu}: \mathbb{C}[\mathcal{T}^\mu] \xrightarrow{\pi_{S^\mu}} S^\mu \xrightarrow{\psi^{-1}} S^\lambda \xrightarrow{\iota_{S^\lambda}} \mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda].$$

Da  $S^\mu$  nicht im Kern von  $f$  und  $S^\lambda$  nicht im Kern von  $g$  enthalten ist, folgt mit Lemma 13.11, dass  $\lambda \geq \mu$  und  $\mu \geq \lambda$  und somit  $\lambda = \mu$ .

Die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von  $S^n$  ist in Bijektion mit den Partitionen von  $n$  und damit der Menge der Specht-Moduln; die zweite Aussage folgt.  $\square$

**ÜBUNG 13.7.** Beweisen oder widerlegen Sie  $S^\lambda \otimes \mathbb{C}_{\text{sgn}} \cong S^{\lambda^t}$  für alle Partitionen  $\lambda \vdash n$ .

**ÜBUNG 13.8.** Bestimmen Sie, welche irreduziblen Darstellungen von  $S_5$  auch irreduzibel als Darstellungen von  $A_5$  sind.

Specht-Moduln sind der Ausgangspunkt der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe. Der Vollständigkeit halber benennen wir einige wichtige Resultate deren Beweis zum Beispiel in den Abschnitten 11, 12 und 13 des Buchs [How22] geführt werden.

**THEOREM 13.13.** Der Specht-Modul  $S^\lambda$  einer Partition  $\lambda \vdash n$  hat die Vektorraumbasis

$$\{b_T \mid [T] \in \mathcal{T}^\lambda \text{ standard}\}.$$

Für eine Partition  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  definieren wir die Mengen

$$\lambda^- \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mu_1, \dots, \mu_k) \mid 0 \leq \mu_i \leq \lambda_i, \mu_i \geq \mu_{i+1} \text{ für alle } 1 \leq i \leq k \text{ und } \mu_1 + \dots + \mu_k = n - 1\},$$

$$\lambda^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mu_1, \dots, \mu_{k+1}) \mid 0 \leq \mu_i \leq \lambda_i + 1, \mu_i \geq \mu_{i+1} \text{ für alle } 1 \leq i \leq k \text{ und } \mu_1 + \dots + \mu_k = n + 1\}.$$

Wir setzen  $S_n = \text{Stab}(n+1) \subset S_{n+1}$  und erhalten die folgende Formel für Induktion und Restriktion von Specht-Moduln.

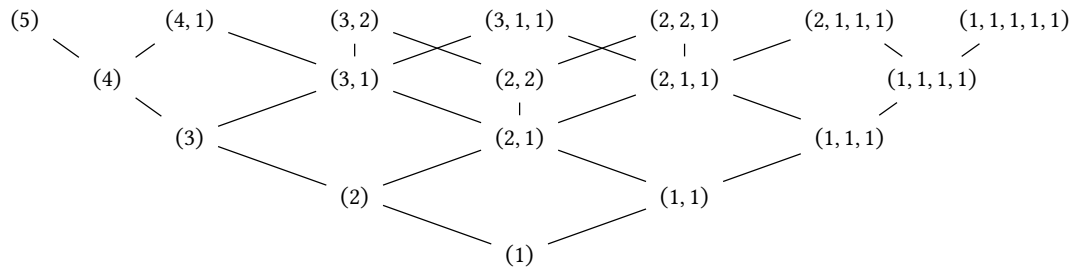
**THEOREM 13.14.** Ist  $n \geq 2$  und  $\lambda \vdash n$  gilt

$$(13.5) \quad \text{Res}_{S_n}^{S_{n+1}}(S^\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in \lambda^-} S^\mu.$$

Analog erhalten wir für  $n \geq 1$  und  $\lambda \vdash n$ , dass

$$(13.6) \quad \text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}}(S^\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in \lambda^+} S^\mu.$$

Damit können wir das Verhalten von Restriktion und Induktion von Specht-Moduln in einem *Hasse-Diagramm* festhalten. Bis  $n = 5$  ergibt sich damit das Bild



ÜBUNG 13.1. (i) Sind die zum Tableau  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$  gehörenden horizontalen und vertikalen Untergruppen isomorph? Sind sie abelsch?

(ii) Zeigen Sie, dass jede zu einem Tableau  $T$  der Form  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  gehörende horizontale Untergruppe isomorph ist zu  $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ .

ÜBUNG 13.2. Zeigen Sie, dass für jedes  $\sigma \in S_n$  und Tableaus  $T, T'$  der Form  $\lambda \vdash n$  gilt  $T \sim T'$  genau dann, wenn  $\sigma.T \sim \sigma.T'$ .

ÜBUNG 13.3. Wir fixieren die Partition  $\lambda = (3, 1)$  von 4.

(i) Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda]$ .

(ii) Zeigen Sie, dass es ein Isomorphismus von Darstellungen  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \cong \mathbb{C}[S_n/H_T]$  gibt, für  $H_T$  die horizontale Gruppe eines Tableaus der Form  $\lambda$ .

(iii) Beweisen Sie, dass  $\mathbb{C}[\mathcal{T}^\lambda] \cong \text{Ind}_{H_T}^{S_n}(\mathbb{C}_{\text{triv}})$  wobei  $H_T$ , wie in der letzten Teilaufgabe, die horizontale Gruppe eines Tableaus  $T$  der Form  $\lambda$  ist.

ÜBUNG 13.4. Bestimmen Sie die Polytabloids zu den Tableaus

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

ÜBUNG 13.5.

(i) Beweisen Sie, dass die lexikographische Ordnung auf der Menge der Partitionen einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine wohldefinierte Totalordnung ist.

(ii) Bestimmen Sie das maximale und minimale Element.

(iii) Ist  $\lambda < \mu$  falls  $\mu^t < \lambda^t$ ?

ÜBUNG 13.6. Sei  $T$  ein Young-Tableau der Form  $\lambda \vdash n$ . Beweisen Sie, dass  $b_T \neq 0$ .

ÜBUNG 13.7. Beweisen oder widerlegen Sie  $S^\lambda \otimes \mathbb{C}_{\text{sgn}} \cong S^{\lambda^t}$  für alle Partitionen  $\lambda \vdash n$ .

ÜBUNG 13.8. Bestimmen Sie, welche irreduziblen Darstellungen von  $S_5$  auch irreduzibel als Darstellungen von  $A_5$  sind.

## E. Grundbegriffe der Darstellungstheorie

Wir haben vier verschiedene Methoden kennengelernt Darstellungen zu beschreiben. Die folgende Tabelle fasst diese knapp zusammen und nennt einige wesentliche Konstruktionsmöglichkeiten.

<b>Darstellung:</b> Gruppenhomomorphismus $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$ .	<b>Darstellung:</b> Gruppenwirkung $G \times V \rightarrow V$ , die den Rechenregeln aus Bemerkung 3.14 genügt.	<b>Modul:</b> Algebrenhomomorphismus $\vartheta: k[G] \rightarrow \text{End}_k(V)$ .	<b>Modul:</b> Lineare Wirkung $k[G] \otimes_k V \rightarrow V$ .
<b>Unterdarstellung:</b> Untervektorraum $U \subset V$ , sodass $\rho(g)u \in U$ für alle $u \in U$ und $g \in G$ .	<b>Unterdarstellung:</b> Untervektorraum $U \subset V$ , sodass $g \triangleright u \in U$ für alle $u \in U$ und $g \in G$ .	<b>Untermodul:</b> Untervektorraum $U \subset V$ , sodass $\vartheta(g)u \in U$ für alle $u \in U$ und $g \in G$ .	<b>Untermodul:</b> Untervektorraum $U \subset V$ , sodass $g \triangleright u \in U$ für alle $u \in U$ und $g \in G$ .
<b>Quotientendarstellung:</b> Quotientenvektorraum $V/U$ , wobei $U$ Unterdarstellung. Es gilt $\rho(g)[v] = [\rho(g)v]$ für alle $g \in G$ und $v \in V$ .	<b>Quotientendarstellung:</b> Quotientenvektorraum $V/U$ , wobei $U$ Unterdarstellung. Es gilt $g \triangleright [v] = [g \triangleright v]$ für alle $g \in G$ und $v \in V$ .	<b>Quotientenmodul:</b> Quotientenvektorraum $V/U$ , wobei $U$ Untermodul. Es gilt $\vartheta(g)[v] = [\vartheta(g)v]$ für alle $g \in G$ und $v \in V$ .	<b>Quotientenmodul:</b> Quotientenvektorraum $V/U$ , wobei $U$ Untermodul. Es gilt $g \triangleright [v] = [g \triangleright v]$ für alle $g \in G$ und $v \in V$ .
<b>Tensor Produkt:</b> Tensorprodukt $V \otimes_k W$ der zugrunde liegenden Vektorräume mit $\rho(g)(v \otimes_k w) = \rho(g)v \otimes_k \rho(g)w$ für alle $g \in G, v \in V$ und $w \in W$ .	<b>Tensor Produkt:</b> Tensorprodukt $V \otimes_k W$ der zugrunde liegenden Vektorräume mit $g \triangleright (v \otimes_k w) = g \triangleright v \otimes_k g \triangleright w$ für alle $g \in G, v \in V$ und $w \in W$ .	<b>Tensor Produkt:</b> Tensorprodukt $V \otimes_k W$ der zugrunde liegenden Vektorräume mit $\vartheta(g)(v \otimes_k w) = \vartheta(g)v \otimes_k \vartheta(g)w$ für alle $g \in G, v \in V$ und $w \in W$ .	<b>Tensor Produkt:</b> Tensorprodukt $V \otimes_k W$ der zugrunde liegenden Vektorräume mit $g \triangleright (v \otimes_k w) = g \triangleright v \otimes_k g \triangleright w$ für alle $g \in G, v \in V$ und $w \in W$ .
<b>Duale Darstellung:</b> Darstellung auf $V^*$ mit $\rho(g)\psi = \psi \circ \rho(g^{-1})$ für alle $g \in G$ und $\psi \in V^*$ .	<b>Duale Darstellung:</b> Darstellung auf $V^*$ mit $g \triangleright \psi = \psi(g^{-1} \triangleright -)$ für alle $g \in G$ und $\psi \in V^*$ .	<b>Dualer Modul:</b> Modulstruktur auf $V^*$ mit $\vartheta(g)\psi = \psi \circ \vartheta(g^{-1})$ für alle $g \in G$ und $\psi \in V^*$ .	<b>Duale Darstellung:</b> Modulstruktur auf $V^*$ mit $g \triangleright \psi = \psi(g^{-1} \triangleright -)$ für alle $g \in G$ und $\psi \in V^*$ .
<b>Direkte Summe:</b> Direkte Summe zweier Vektorräume $V \oplus W$ mit $\rho(g)(v, w) = (\rho(g)v, \rho(g)w)$ .	<b>Direkte Summe:</b> Direkte Summe zweier Vektorräume $V \oplus W$ mit $g \triangleright (v, w) = (g \triangleright v, g \triangleright w)$ .	<b>Direkte Summe:</b> Direkte Summe zweier Vektorräume $V \oplus W$ mit $\vartheta(g)(v, w) = (\vartheta(g)v, \vartheta(g)w)$ .	<b>Direkte Summe:</b> Direkte Summe zweier Vektorräume $V \oplus W$ mit $g \triangleright (v, w) = (g \triangleright v, g \triangleright w)$ .
<b>Direkter Summand:</b> Unterdarstellung $U \subset V$ die ein Komplement besitzt.	<b>Direkter Summand:</b> Unterdarstellung $U \subset V$ die ein Komplement besitzt.	<b>Direkter Summand:</b> Untermodul $U \subset V$ der ein Komplement besitzt.	<b>Direkter Summand:</b> Untermodul $U \subset V$ die ein Komplement besitzt.
<b>einfach:</b> Es existiert keine echte Unterdarstellung	<b>einfach:</b> Es existiert keine echte Unterdarstellung	<b>einfach:</b> Es existiert kein echter Untermodul	<b>einfach:</b> Es existiert kein echter Untermodul
<b>halbeinfach:</b> Direkte Summe einfacher Unterdarstellungen	<b>halbeinfach:</b> Direkte Summe einfacher Unterdarstellungen	<b>halbeinfach:</b> Direkte Summe einfacher Untermoduln	<b>halbeinfach:</b> Direkte Summe einfacher Untermoduln

## Literaturverzeichnis

- [BB05] Anders Björner and Francesco Brenti. *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231 of *Grad. Texts Math.* New York, NY: Springer, 2005.
- [Bis93] David M. Bishop. *Group theory and chemistry*. New York, NY: Dover Publication, corrected reprint of the 1973 orig. edition, 1993.
- [Dia88] Persi Diaconis. *Group representations in probability and statistics*, volume 11 of *IMS Lect. Notes, Monogr. Ser.* Hayward, CA: Institute of Mathematical Statistics, 1988.
- [EGH<sup>+</sup>09] Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, Elena Yudovina, and Slava Gerovitch. *Introduction to Representation theory*. 2009.
- [EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [EMTW20] Ben Elias, Shotaro Makisumi, Ulrich Thiel, and Geordie Williamson. *Introduction to Soergel bimodules*, volume 5 of *RSME Springer Ser.* Cham: Springer, 2020.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory. A first course*, volume 129 of *Grad. Texts Math.* New York etc.: Springer-Verlag, 1991.
- [Hal15] Brian Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*, volume 222 of *Grad. Texts Math.* Cham: Springer, 2nd ed. edition, 2015.
- [How22] R. Michael Howe. *An invitation to representation theory. Polynomial representations of the symmetric group*. Springer Undergrad. Math. Ser. Cham: Springer, 2022.
- [Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1990.
- [Hum06] James E. Humphreys. *Modular representations of finite groups of Lie type.*, volume 326 of *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [Isa06] I. Martin Isaacs. *Character theory of finite groups*. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, corrected reprint of the 1976 original edition, 2006.
- [Lam99] Tsit-Yuen Lam. *Lectures on Modules and Rings*, volume 189 of *Grad. Texts Math.* New York, NY: Springer, 1999.
- [Lam01] Tsit-Yuen Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*, volume 131 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2001.
- [Las23] Caroline Lassueur. *Modular representation theory of finite groups: An introduction*. 2023.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [Mor03] Jack Morava. On the canonical formula of C I'evi-strauss. *arXiv e-prints*, 2003.
- [Pre09] Mike Prest. *Purity, Spectra and Localisation.*, volume 121 of *Encycl. Math. Appl.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [Rie17] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.
- [Sch21] Travis Schedler. *Group representation theory. lecture notes*, 2021.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups. Translated from the French by Leonard L. Scott*, volume 42 of *Grad. Texts Math.* Springer, Cham, 1977.
- [Sol95] Ron Solomon. On finite simple groups and their classification. *Notices Am. Math. Soc.*, 42(2):231–239, 1995.
- [Ste12] Benjamin Steinberg. *Representation theory of finite groups. An introductory approach*. Universitext. Berlin: Springer, 2012.
- [Web16] Peter Webb. *A course in finite group representation theory*, volume 161 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [Wil95] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Ann. Math. (2)*, 141(3):443–551, 1995.